Opakování (předmětu IMA02)
Kartézský součin, binární relace

- **Kartézským součinem** dvou množin A, B rozumíme množinu **A x B** = $\{[x,y];\ x \in A \wedge y \in B\}$, tj. množinu všech uspořádaných dvojic [x,y], kde $x \in A$ a $y \in B$.

- **Binární relací R z množiny A do množiny B** rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu A x B.

- **Binární relací R** v neprázdné množině **A** rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu A x A.

Příklad 1. Na množině A = {0,1,2,3,4} jsou definovány binární relace R, S, T, U, V. Zapište je výčtem prvků:

$R = \{[x,y] \in A \times A;\ x > y\}$
$S = \{[x,y] \in A \times A;\ x + y = 5\}$
$U = \{[x,y] \in A \times A;\ x = y\}$
$V = \{[x,y] \in A \times A;\ x = y \vee x = 2.y\}$

- Nechť v A je definována relace R: Relaci R´ v množině M definovanou předpisem **R´ = (A x A) - R** nazýváme **doplňkovou relací** k relaci R v množině A.

- Nechť v A je definována relace R: Relaci $\mathbf{R^{-1}} = \{[x,y] \in A \times A;\ \{[y,x] \in R\}$ nazýváme **relací inverzní** k relaci R v množině A.

Vlastnosti binárních relací v množině A

Binární relace R v množině A je

- **reflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in A)\ ([x,x] \in R)$,

(obsahuje všechny uspořádané dvojice [x,x], kde $x \in A$, tj. v uzlovém grafu je každý uzel opatřen smyčkou)

- **antireflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in A)\ ([x,x] \notin R)$,

(neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu [x,x], kde $x \in A$, tj. v uzlovém grafu není žádný uzel opatřen smyčkou)

- **symetrická** právě tehdy, když $(\forall x,y \in A)\ ([x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R]$,

(s každou uspořádanou dvojicí [x,y] obsahuje i dvojici [y,x], tj. v uzlovém grafu jsou mezi dvěmi uzly buď dvě šipky nebo žádná)

- **antisymetrická**, právě tehdy, když $(\forall x,y \in A)\ [(x \neq y \wedge [x,y] \in R) \Rightarrow [y,x] \notin R]$,

(s žádnou dvojicí [x,y] různých prvků neobsahuje dvojici [y,x], tj. v uzlovém grafu je mezi dvěmi různými uzly buď jedna šipka nebo žádná)

- **tranzitivní** právě tehdy, když $(\forall x,y,z \in A)\ [([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R]$, (jestliže se v relaci vyskytují „na sebe navazující dvojice“, pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice).

- **souvislá** právě tehdy, když $(\forall x,y \in A)\ [x \neq y \Rightarrow ([x,y] \in R \vee [y,x] \in R)]$,

(každé dva různé prvky z množiny A musí být „spolu v relaci“, tj. v uzlovém grafu jsou dva různé uzly spojeny alespoň jednou šipkou)

Binární relaci U v množině A nazýváme **uspořádání** v A, právě když U je **antisymetrická a tranzitivní.**

Binární relaci U v množině A nazýváme **uspořádání**

- **ostré** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a antireflexivní**,
- **neostré** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a reflexivní**.
- **lineární** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a souvislá.**

Binární relaci R v množině M nazýváme **relací ekvivalence** na M**,** právě když je **reflexivní, symetrická a tranzitivní.**

Každá relace ekvivalence na množině M vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu M.

Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny M je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že každý prvek množiny M patří právě do jedné z těchto tříd.

Příklad 2. V množině $M = \{1,2,3\}$ je definována binární relace
a) $R_1 = \{[x,y] \in M \times M; x < 3 \Rightarrow x+y = 3\}$,
b) $R_2 = \{[x,y] \in M \times M; x = y \Rightarrow x = y\}$,
c) $R_3 = \{[x,y] \in M \times M; x = y \Rightarrow x+y = 3\}$,
d) $R_4 = \{[x,y] \in M \times M; x < y \Leftrightarrow x = y\}$,
e) $R_5 = \{[x,y] \in M \times M; x = 2 \vee y > x+2\}$,
f) $R_6 = \{[x,y] \in M \times M; x < y \wedge x|y\}$.

Zapište tyto relace výčtem prvků, určete jejich kartézské a uzlové grafy, určete jejich vlastnosti.

Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

- Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že $[a,b] \in$ **R.** Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme $R: A \rightarrow B$.

Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

- Jestliže $[a,b] \in \mathbf{R}$, pak prvek $a \in A$ nazýváme **vzorem** prvku $b \in B$ v zobrazení **R**; prvek $b \in B$ nazýváme **obrazem** prvku $a \in A$ v zobrazení **R**.
- Množina $O_1(\mathbf{R}) = \{a \in A$: existuje $b \in B$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R}) = \{b \in B$: existuje $a \in A$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

Příklad 3. Jsou dány množiny $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b\}$. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B, případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

a) $\mathbf{R_1} = \{[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]\}$,
b) $\mathbf{R_2} = \{[x,a], [z,b]\}$,
c) $\mathbf{R_3} = \{[x,a], [y,a], [z,a]\}$.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

I) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A do množiny B**.

II) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A na množinu B**.

III) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A na množinu B**.

IV) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A do množiny B**.

- Zobrazení **R** z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** právě tehdy, když relace $\mathbf{R}^{-1}$ je zobrazení z množiny B do množiny A.

- Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Příklad 4. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) $\mathbf{R_1} = \{[1,a], [2,c], [3,d]\}$,
b) $\mathbf{R_2} = \{[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]\}$,
c) $\mathbf{R_3} = \{[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]\}$.

Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny

- Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme $A \sim B$.

Příklad 5. Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {x, y}. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Poznámka. Relace ~ dvou množin definovaná v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace ~ je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ vytváří rozklad systému $\mathcal{M}$ na třídy ekvivalentních množin.

Příklad 6. Je dán systém množin $\mathcal{M}$ = {A, B, C, D, E, F, G, H}, kde A = {a, b, c}, B = {1, 2}, C = {x, y}, D = {○, ○, ○, ○}, E = {Δ, Δ, Δ}, F = { *, *}, G = { □ }, H = {☺, ☺, ☺, ☺}. Rozhodněte, které množiny ze systému $\mathcal{M}$ jsou ekvivalentní.

- Množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.

- Množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

Poznámka. Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když
$M \subset N \wedge M \neq N$.

Binární operace v množině (nová látka)

- Nechť M je libovolná neprázdná množina. **Binární operací** ○ v množině M rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu M x M do množiny M.

- Jestliže v binární operaci je vzoru $[x,y] \in$ M x M přiřazen obraz $z \in$ M, píšeme: $x \circ y = z$; prvek $z \in$ M se nazývá **výsledek operace** ○.

Poznámka. <u>Označení binárních operací</u>: +, $\cdot$, ○, ⁎, □,..
<u>Příklady binárních operací ve školské matematice</u>:

1) Sčítání (+), odčítání (**-**), násobení ($\cdot$), dělení (**:**), umocňování,… (pracujeme s nimi v číselných množinách).
2) Sjednocení ($\cup$), průnik ($\cap$), rozdíl (**-**), symetrický rozdíl (Δ) množin,… (pracujeme s nimi v systémech množin).

<u>Vlastnosti binárních operací:</u>

Označení:

- ℕ - {1, 2, 3, 4, ...} - množina všech přirozených čísel
- $\mathbb{N}_0$ - {0, 1, 2, 3, 4, ...} - množina všech přirozených čísel s nulou (množina všech nezáporných celých čísel)
- ℂ - {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...} - množina všech celých čísel
- ℚ - množina všech racionálních čísel (zlomky)
- ℝ - množina všech reálných čísel

- Binární operace ○ v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in$ M x M, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná na** množině M). Značíme **ND**.

  Symbolicky: $(\forall x, y \in \mathrm{M})(\exists z \in \mathrm{M})[x \circ y = z]$.

- Binární operace ○ definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

  $$(\forall x, y \in \mathrm{M})[x \circ y = y \circ x].$$

  Značíme **K**.

- Binární operace ○ definovaná na množině M, se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

  $$(\forall x, y, z \in \mathrm{M})[(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)].$$

  Značíme **A**.

- Nechť v množině M je definována binární operace ○. Existuje-li prvek $e \in$ M, pro který platí:

$$(\forall x \in \mathrm{M})[\, x \circ e = e \circ x = x].$$

Pak se prvek $e \in$ M nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci $\circ$**.**
Značíme **EN**.

- Nechť v množině M je definována binární operace $\circ$ a nechť e je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci $\circ$. Prvek $\bar{a} \in$ M nazýváme **inverzním prvkem** k prvku $a \in$ M v operaci $\circ$ v množině M právě tehdy, když platí:

$$\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e.$$

Jestliže $(\forall\, a \in \mathrm{M})(\exists\, \bar{a} \in \mathrm{M})[\, \bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e]$, řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci $\circ$. Značíme **EI**.

- Říkáme, že binární operace $\circ$ definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

$$(\forall\, a, b \in \mathrm{M})\,)(\exists\, x, y \in \mathrm{M})[\, a \circ x = b \wedge y \circ a = b].$$

Značíme **ZR**.

Algebraické struktury s jednou operací

- Uspořádaná dvojice (M, $\circ$), kde M je neprázdná množina, ve které je definována binární operace $\circ$, se nazývá **algebraická struktura s jednou operací.**

I. Algebraická struktura (M, $\circ$) se nazývá **grupoid** právě tehdy, když operace $\circ$ je neomezeně definovaná v množině M (ND).

II. Grupoid (M, $\circ$), jehož operace $\circ$ je asociativní, se nazývá **podgrupa** (ND, A).

III. Pologrupa (M, $\circ$) taková, že v M existuje neutrální prvek vzhledem k operaci (M, $\circ$) a ke každému prvku $a \in$ M existuje prvek inverzní $\bar{a} \in$ M, se nazývá **grupa** (ND, A, EN, EI).

Poznámka 6. Jestliže v případech I., II., III. je operace $\circ$ komutativní, pak hovoříme o

I. Komutativním grupoidu
II. Komutativní pologrupě
III. Komutativní grupě

Schéma k *Algebraickým strukturám s jednou operací*:

	Vlastnost operace ○	**Algebraická struktura**
(M, ○)	ND	Grupoid
	ND ∧ K	Komutativní grupoid
	ND ∧ A	Pologrupa
	ND ∧ A ∧ K	Komutativní pologrupa
	ND ∧ A ∧ EN ∧ EI	Grupa
	ND ∧ A ∧ EN ∧ EI ∧ K	Komutativní grupa

Určení vlastností binárních operací podle tvaru operační tabulky

Uvažujme binární operaci ○ v množině M zapsané pomocí operační tabulky, viz příklad:

Příklad 1: Je dána množina M = {a, b, c} a operace ○ v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace ○. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují.

○	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

Vysvětlivky k tabulce: a ○ a = b
b ○ c = b
c ○ a = a

Řešení: **ND** ∧ **K** ∧ ~~A~~ ∧ **EN** ∧ **EI** ∧ ~~ZR~~

IMA13 Aritmetika 1 (podzim 2024)
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Pravidla pro určování vlastností operace v množině dané tabulkou:

ND: Tabulka je celá vyplněná prvky množiny M
K: Prvky tabulky, která je celá vyplněná prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hlavní diagonály
A: Z tabulky obvykle nepoznáme - určujeme z definice nebo ze vztahu **A** ⇒ **(ZR** ⇔ **EI)**
EN: Alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
EI: Každý řádek i sloupec tabulky obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a sloupcích existují takové, že jsou souměrně rozloženy podle hlavní diagonály.
ZR: Každý řádek i sloupec obsahuje všechny prvky množiny M
Agresivní prvek $g \in$ M poznáme tak, že v celém jemu příslušejícím řádku i sloupci se vyskytuje pouze prvek g.

Problém asociativity operace ○

Vyjdeme ze vztahu **A** ⇒ **(ZR** ⇔ **EI):**

1. Pokud nastane situace, že **EI** ∧ **~~ZR~~** nebo **~~EI~~** ∧ **ZR**, pak platí, že operace ○ není asociativní, tj. **~~A~~**
2. Pokud nastane situace, že **~~EI~~** ∧ **~~ZR~~** nebo **EI** ∧ **ZR**, pak asociativitu operace ○ nelze určit přímo, ale je potřeba využít *Definici 4* ověřením všech možných trojic prvků z dané množiny (zdlouhavé)

Příklad 2: Je dána množina M = {a, b, c} a operace ○ v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace ○. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Určete typ algebraické struktury (M, ○).

1.

○	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

2.

○	a	b	c
a	c	a	a
b	a	c	b
c	a	b	c

3.

$\circ$	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

Algebraické struktury se dvěma operacemi

- Na množině M jsou definovány dvě binární operace $\oplus$ a $\odot$. Operace $\odot$ je **distributivní vzhledem k operaci** $\oplus$ právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y, z \in \mathrm{M})[\,(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)] \quad \ldots \text{ pravý distributivní zákon (PDZ)}$$
$$\wedge$$
$$[z \odot (x \oplus y) = (z \odot x) \oplus (z \odot y)] \quad \ldots \text{ levý distributivní zákon (LDZ).}$$

Značíme **$\odot$ D $\oplus$.**

Nechť M je neprázdná množina, ve které jsou definovány dvě operace $\oplus$ a $\odot$.

- Algebraická struktura (M, $\oplus$, $\odot$) se nazývá **polookruh** právě tehdy, když:
  I. Operace $\oplus$ je ND $\wedge$ A $\wedge$ K
  II. Operace $\odot$ je ND $\wedge$ A
  III. Platí $\odot$ D $\oplus$
- Je-li operace $\oplus$ navíc K, pak polookruh (M, $\oplus$, $\odot$) nazýváme **komutativní polookruh**.
- Pologrupu (M, $\oplus$) nazýváme **aditivní pologrupa**.
- Pologrupu (M, $\odot$) nazýváme **multiplikativní pologrupa**.
- Polookruh (M, $\oplus$, $\odot$), jehož aditivní pologrupa (M, $\oplus$) je komutativní grupou, se nazývá **okruh.**
- Je-li operace $\odot$ navíc K, pak okruh (M, $\oplus$, $\odot$), nazýváme **komutativní okruh.**
- Nechť (M, $\oplus$, $\odot$) je okruh. Prvky $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a, b \in$ M, pro které platí $a \odot b = 0$, se nazývají **dělitelé nuly** okruhu (M, $\oplus$, $\odot$).
- Komutativní okruh (M, $\oplus$, $\odot$), ve kterém neexistují dělitelé nuly, se nazývá **obor integrity**.
- Okruh (M, $\oplus$, $\odot$), pro který platí, že (M – {0}, $\odot$) je grupa, se nazývá těleso.
- Je-li operace $\cdot$ navíc K, pak těleso (M, $\oplus$, $\odot$).nazýváme **komutativní těleso.**

Poznámka: Uvažujeme polookruh (M, $\oplus$, $\odot$):

- Operace $\oplus$ se nazývá **<u>sčítání</u>.** V zápise

$$a \oplus b = c$$

nazýváme prvky a, b **<u>sčítanci</u>,** prvek c nazýváme **<u>součet</u>** prvků a, b.
Neutrální prvek nazýváme **<u>nulový prvek</u>**, značíme 0. Pokud k prvku a existuje prvek inverzní, nazýváme jej **<u>opačný prvek</u>** k prvku a, značíme – a. Existuje-li prvek x, pro který platí

$b \oplus x = a$, nazýváme jej **rozdíl** prvků a, b a zapisujeme

$$x = a \ominus b.$$

V tomto zápise prvek a nazýváme **menšenec**, prvek b nazýváme **menšitel**. Pokud existuje prvek $\ominus b$, pak platí $x = a \ominus b = a \oplus (\ominus b)$. Operace $\ominus$ se nazývá **odčítání**.

- Operace $\odot$ se nazývá **násobení.** V zápise

$$a \odot b = c$$

nazýváme prvek a, resp. b **1. činitel**, resp. **2. činitel**, prvek c nazýváme **součin** prvků a, b. Neutrální prvek nazýváme **jednotkový prvek**, značíme 1. Pokud k prvku a existuje prvek inverzní, nazýváme jej **převrácený prvek** k prvku a, značíme $\frac{1}{a}$ nebo též a^{-1}. Existuje-li pro prvky $a, b \neq 0$ prvek x, pro který platí $b \odot x = a$, nazýváme jej **podíl** prvků a, b a zapisujeme

$$x = a \oplus\!\!\!\!\div\; b \text{ nebo taky } x = \frac{a}{b}.$$

V tomto zápise prvek a nazýváme **dělenec** (**čitatel**), prvek b nazýváme **menšitel** (**jmenovatel**). Pokud existuje prvek $\frac{1}{b}$, resp. b^{-1}, pak platí

$$x = a \oplus\!\!\!\!\div\; b = \frac{a}{b} = a \odot \frac{1}{b} = a \odot b^{-1}.$$ Operace $\oplus\!\!\!\!\div$ se nazývá **dělení**.

Podíl prvků pro $b = 0$ nedefinujeme, neboť:

1. v případě, že $a = 0$, je řešením rovnice $0 \odot x = 0$ každý prvek množiny M.
2. v případě, že $a \neq 0$, rovnice $0 \odot x = a$ nemá řešení v množině M.

Případ 1. vede k tomu, že by dělení nebylo operací!

IMA13 Aritmetika 1 (podzim 2024)
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Schéma k *Algebraickým strukturám se dvěma operacemi*:

<table>
<tr><th></th><th>operace a vlastnosti</th><th>algebraická struktura</th></tr>
<tr><td rowspan="15">$(M, \oplus, \odot)$</td><td>$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A</td><td rowspan="3">Polookruh (komutativní)</td></tr>
<tr><td>$\odot$ ND $\wedge$ (K) $\wedge$ A</td></tr>
<tr><td>$\odot$ D $\oplus$</td></tr>
<tr><td>$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI</td><td rowspan="3">Okruh (komutativní)</td></tr>
<tr><td>$\odot$ ND $\wedge$ (K) $\wedge$ A</td></tr>
<tr><td>$\odot$ D $\oplus$</td></tr>
<tr><td>$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI</td><td rowspan="4">Komutativní okruh bez dělitelů nuly = Obor integrity</td></tr>
<tr><td>$\odot$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A</td></tr>
<tr><td>$\odot$ D $\oplus$</td></tr>
<tr><td>Neexistují $a \neq 0, b \neq 0, a, b \in M$, pro které platí $a \odot b = 0$.</td></tr>
<tr><td>$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI</td><td rowspan="4">Těleso (komutativní)</td></tr>
<tr><td>$\odot$ ND $\wedge$ (K) $\wedge$ A</td></tr>
<tr><td>$\odot$ D $\oplus$</td></tr>
<tr><td>$(M - \{0\}, \odot)$ je grupa, tj. na množině $M - \{0\}$ je operace
$\odot$ ND $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI</td></tr>
</table>

Příklady algebraických struktur číselných množin se dvěmi operacemi

Příklad: Uvažujme binární operace obyčejné sčítání $+$ a obyčejné násobení $\cdot$ v číselných množinách:

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **komutativní polookruh s jednotkovým prvkem**

$+$ … ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ ~~EN~~ $\wedge$ ~~EI~~

$\cdot$ … ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ ~~EI~~

e = 1

$\cdot$ D $+$

----

2. $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ **komutativní polookruh s nulovým** (e = 0) **a jednotkovým prvkem** (e = 1)

$+ \quad \ldots\ \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI}$

$e = 0$

$\cdot \quad \ldots\ \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI}$

$e = 1$

$\cdot$ D $+$

---

3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **komutativní okruh bez dělitelů nuly = obor integrity**

$+ \quad \ldots\ \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$

$e = 0$

$\cdot \quad \ldots\ \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI}$

$e = 1$

$\cdot$ D $+$

V množině $\mathbb{C}$ neexistují dělitelé nuly.

---

4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **komutativní těleso**

$+ \quad \ldots\ \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$

$e = 0$

$\cdot \quad \ldots\ \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge EI$

$e = 1$

$\cdot$ D $+$

$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ komutativní grupa, tzn. na množině $\mathbb{Q} - \{0\}$ a na množině $\mathbb{R} - \{0\}$ má operace $\cdot$ vlastnosti: $\underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$