M. Vaňurová, J. Beránek, K. Matoušková
Katedra matematiky Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KARDINÁLNÍ ČÍSLA

Definice.

Třídu, do které patří množina A z neprázdného systému množin $\mathcal{M}$ a všechny množiny z tohoto systému, které jsou s množinou A ekvivalentní, nazveme **kardinální číslo množiny A**. Kardinální číslo množiny A budeme značit: $|A|$

Poznámka:
Pro kardinální číslo množiny se užívá také pojmu mohutnost množiny.

Příklad:
V příkladu v minulé lekci relace ekvivalence množin rozložila zadaný systém množin
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{t, u\}$, $D = \{1, a, x, y\}$, $E = \{a\}$, $F = \{o, \times\}$,
$G = \{x, y, z\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, ... \}$, $P = \{5, 10, 15, 20, ...\}$, $H = \{[t, t], [t, u]\}$, $K = \{o\}$.
na následující třídy:
$T_1 = \{A, B, G\}$, $T_2 = \{C, F, H\}$, $T_3 = \{E, K\}$, $T_4 = \{D\}$, $T_5 = \{N, P\}$.
Třída T_1 je kardinálním číslem každé z množin A, B, G. Můžeme psát $T_1 = |A| = |B| = |G|$.
K označení třídy, tj. kardinálního čísla, si můžeme vybrat kteroukoli z množin patřících do této třídy. Každá z těchto množin dané kardinální číslo (danou třídu rozkladu) reprezentuje.
Třída T_2 je kardinálním číslem množin C, F, H, tedy $T_2 = |C| = |F| = |H|$.
$T_3 = |E|$, $T_5 = |N| = |P|$, atd.

Pro každé dvě množiny X, Y platí: Kardinální čísla množin X, Y se rovnají, právě když jsou množiny X, Y ekvivalentní. $|X| = |Y| \Leftrightarrow X \sim Y$

Úkol:
Uvažujte systém všech množin $\mathcal{M}$.

a) Zapište výčtem prvků alespoň dvě množiny, které mají stejné kardinální číslo jako množina D z předchozího příkladu.
b) Zapište výčtem prvků množinu R tak, aby $|R| = |L|$, kde množina $L = \{t, u, v, x, y\}$.

Definice:

Kardinální čísla konečných množin nazveme **přirozenými čísly**.

Poznámka:
Kardinální číslo množiny L tedy nazveme „pět“ a označíme $|L| = 5$.
Z uvedených příkladů je zřejmé, že kardinální číslo konečné množiny vyjadřuje společnou vlastnost této množiny a všech množin, které mají stejně prvků jako tato množina, tj. jsou stejně početné.

Definice.

Jestliže $|A| \neq |B|$ a množina A je ekvivalentní s vlastní podmnožinou množiny B, říkáme, že kardinální číslo množiny A **je menší než** kardinální číslo množiny B, píšeme $\mathbf{|A| < |B|}$.

***Příklad**:*

Uvažujme množiny z minulého příkladu,

M. Vaňurová, J. Beránek, K. Matoušková
Katedra matematiky Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně

tj. A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}, C = {t, u}, D = {1, a, x, y}, E ={a}, F = {o, ×},
G = {x, y, z}, N = {1, 2, 3, 4, ... }, P = {5, 10, 15, 20, ...}, H = {[t, t], [t, u]}, K = {o}.
Platí např. |C| < |B|, protože |C| $\neq$ |B| a C je ekvivalentní např. s množinou {a, b}, což je pravá podmnožina množiny B.
|H| < |D|, protože |D| $\neq$ |H| a H ~ D^*, $D^* \subset$ D, např. D^* = {x, y}.

Ale pozor: I když P je pravou podmnožinou množiny N, je |P| = |N|, protože P ~ N.

Sčítání a násobení kardinálních čísel

V dalším textu budeme pracovat se systémem množin *M*, který obsahuje prázdnou množinu, jednoprvkovou množinu, s každými dvěma množinami A, B i jejich sjednoceni A $\cup$ B a jejich kartézský součin A×B a také s každými dvěma množinami A,B i množinu B^*, která je s množinou B ekvivalentní (B ~ B^*) a s množinou A disjunktní (A $\cap$ B = Ø)

Definice.

Jestliže pro množiny A, B ze systému množin *M* platí A $\cap$ B = Ø , pak **součtem kardinálních čísel |A|, |B|** rozumíme kardinální číslo sjednocení množin A, B, tj. **|A| + |B| = |A $\cup$ B|** .

Příklad:
Vypočtěte součet kardinálních čísel
a) množin A, B, kde A = {a, b, c}, B = {1, 2},
b) množin A, B, kde A = {a, b, c}, B = {a, x}.

Řešení:
a) A $\cap$ B = Ø, tedy |A| + |B| = |A $\cup$ B|, tj. |A| + |B| = |{a, b, c, 1, 2}|
Srovnejte: |A| = 3, |B| = 2, 3 + 2 = 5 = |A $\cup$ B|.
b) A $\cap$ B $\neq$ Ø, množiny A, B mají společný prvek. K určení součtu kardinálních čísel si tedy musíme zvolit jiného reprezentanta jednoho z kardinálních čísel, např. místo množiny B zvolíme jinou množinu, která je s ní ekvivalentní (tedy také má stejné kardinální číslo s B) a která je současně s tou druhou množinou (tedy s A) disjunktní (nemá s ní společné prvky):
Např. zvolíme C = $\{p,q\}$. Platí C ~ B a A $\cap$ C = Ø.
Pak |A| + |B| = |A| + |C| = |A $\cup$ C| , tj.
$|\{a,b,c\}| + |\{a,x\}| = |\{a,b,c\}| + |\{p,q\}| = |\{a,b,c\} \cup \{p,q\}| = |\{a,b,c,p,q\}|$.
Srovnejte: |A| = 3, |B| = |C| = 2, 3 + 2 = 5 = |A $\cup$ C|.

M. Vaňurová, J. Beránek, K. Matoušková
Katedra matematiky Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně

Definice.

Součinem kardinálních čísel $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}|$ rozumíme kardinální číslo kartézského součinu množin A, B, tj. $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

Příklad:
Vypočtěte součet kardinálních čísel množin A, B, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, x\}$.

Řešení:
$|A| \cdot |B| = |A \times B|$, tj. $|A| \cdot |B| = |\{[a,a], [a,x], [b,a], [b,x],[c,a], [c,x]\}|$
Srovnejte: $|A| = 3$, $|B| = 2$, $3 \cdot 2 = 6 = |A \times B|$.
.

Ve cvičení dokážeme, že sčítání i násobení kardinálních čísel jsou operace neomezeně definované, asociativní, komutativní na množině kardinálních čísel a že kardinální číslo prázdné množiny je neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání kardinálních čísel a kardinální číslo jednoprvkové množiny je neutrálním prvkem vzhledem k násobení kardinálních čísel.