M. Vaňurová, J. Beránek, K. Matoušková
Katedra matematiky Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KONSTRUKCE OBORU INTEGRITY (C, +, .)

Na kartézském součinu NxN definujeme binární relaci ~ (tzv.„ekvivalenci uspořádaných dvojic přirozených čísel“):

[a,b] ~ [c,d] ⇔ a + d = b + c

Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině NxN (dokažte).
Je tedy relací ekvivalence na NxN a vytváří rozklad množiny NxN na třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

Rozklad množiny NxN vytvořený relací ~ nazýváme **množinou všech celých čísel**, ozn. **C**.
Třídy rozkladu nazýváme **celá čísla**.

Poznámka:
Celá čísla, tj. třídy rozkladu NxN, budeme označovat velkými tiskacími písmeny A, B, ..., nebo pomocí kterékoli dvojice, která do této třídy patří:

Např. $A = [1\overset{\bullet}{,}2] = \{[0,1], [1,2], [2,3], \ldots , [10,11], \ldots\ldots\} = [0\overset{\bullet}{,}1] = \ldots$
Můžeme též psát $[1,2] \in A$

Sčítání a násobení celých čísel:

Nechť celá čísla A, B jsou reprezentována uspořádanými dvojicemi [a,b], [c,d], tj.
$A = [a\overset{\bullet}{,}b]$ a $B = [c\overset{\bullet}{,}d]$. Pak

$$\mathbf{A + B} = [a\overset{\bullet}{,}b] + [c\overset{\bullet}{,}d] = [a+c\overset{\bullet}{,}b+d]$$

$$\mathbf{A \cdot B} = [a\overset{\bullet}{,}b] \cdot [c\overset{\bullet}{,}d] = [ac+bd\overset{\bullet}{,}ad+bc]$$

Součet ani součin celých čísel nezávisí na volbě reprezentantů.

Algebraická struktura **(C, +, ·) je obor integrity s jednotkovým prvkem**.

Vlastnosti (C, + , ·) :
\+ : ND, A, K, ZR, EN, EI
· : ND, A, K, EN
· D +
neexistují vlastní dělitelé nulového prvku

Nulový prvek: $O = [x\overset{\bullet}{,}x] = [0\overset{\bullet}{,}0] = \{[0,0], [1,1], [2,2], \ldots \}$

Jednotkový prvek: $J = [x+1\overset{\bullet}{,}x] = [1\overset{\bullet}{,}0] = \{[1,0], [2,1], [3,2], \ldots\ldots \}$

Opačné číslo k celému číslu $A = [a\overset{\bullet}{,}b]$: $-A = [b\overset{\bullet}{,}a]$

Rozdíl A – B dvou celých čísel A, B je celé číslo X, pro které platí A = B + X.
Je-li $A = [a\overset{\bullet}{,}b]$, $B = [c\overset{\bullet}{,}d]$, je $X = [a+d\overset{\bullet}{,}b+c]$.

M. Vaňurová, J. Beránek, K. Matoušková
Katedra matematiky Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně