Kapitola 4

Některé další geometrické pojmy

V následujícím textu uvedeme definice a základní vlastnosti některých dalších geometrických pojmů. U vybraných vlastností předkládáme i důkazy, další důkazy necháváme na čtenáři. Uvedené pojmy a jejich vlastnosti jsou využity ve cvičení při řešení důkazových a konstrukčních úloh.

4.1 Kruh, kružnice, kulová plocha, koule

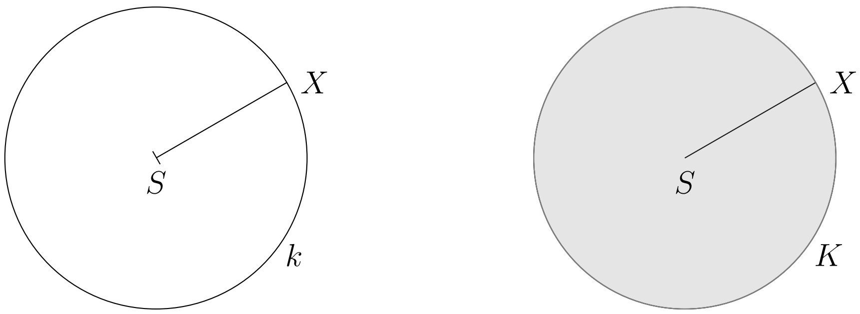
Seznámíme se s definicí kružnice, kruhu, kulové plochy a koule pomocí shodnosti úseček. Tento způsob odpovídá zavedení těchto pojmů v učivu geometrie na 1. stupni základní školy. Současně si připomeneme definici těchto pojmů pomocí vzdálenosti bodů, které jsme poznali také již na základní škole.

Definice 4.1 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a úsečka r. ***Kružnicí*** k o středu S a poloměru r se nazývá množina všech takových bodů X roviny ρ, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou r.
Symbolicky:
$$k(S,r) = \{X \in \rho\,;\; SX \cong r\}.$$

Definice 4.2 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a reálné číslo $r > 0$. ***Kružnicí*** k o středu S a poloměru r se nazývá množina všech takových bodů X roviny ρ, které mají od středu S vzdálenost r.
Symbolicky:
$$k(S,r) = \{X \in \rho\,;\; |SX| = r\},\; r \in \mathbb{R}^+.$$

Poznámka 4.1 Je třeba si uvědomit, že v definici 4.1 je r úsečka, zatímco v definici 4.2 je r kladné reálné číslo. Z toho je patrný dvojí význam pojmu poloměr kružnice - jednak jím rozumíme úsečku, jednak kladné reálné číslo.

Definice 4.3 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a úsečka r. ***Kruhem*** K o středu S a poloměru r se nazýváme sjednocení všech úseček SX, pro které platí $SX \cong r$ a $SX \subset \rho$.
Označujeme: kruh $K(S, r)$.



$a)$ kružnice $k(S, r)$ $b)$ kruh $K(S, r)$

Obr. 4.1

Definice 4.4 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a reálné číslo $r > 0$. ***Kruhem*** K o středu S a poloměru r se nazývá množina všech takových bodů X roviny ρ, jejichž vzdálenost od středu S je nejvýše rovna r.
Symbolicky:

$$\text{kruh } K(S, r) = \{X \in \rho\,;\ |SX| \leqq r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

Poznámka 4.2 Podobně jako poloměr kružnice má i poloměr kruhu dvojí význam, jak je patrno z definic 4.3 a 4.4. Rovněž termín poloměr koule nebo kulové plochy má tentýž dvojí význam, jak poznáme v následujících definicích. Navíc si uvědomme analogii definic kružnice a kulové plochy, kruhu a koule.

Definice 4.5 Nechť je dán bod S a úsečka r. Množina všech bodů X prostoru, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou r, se nazývá ***kulová plocha*** κ se středem S a poloměrem r.
Symbolicky:

$$\kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ SX \cong r\}.$$

Definice 4.6 Nechť je dán bod S a reálné číslo $r > 0$. Množina všech bodů X prostoru, jejichž vzdálenost od středu S je rovna r, se nazývá ***kulová plocha*** κ se středem S a poloměrem r.
Symbolicky:

$$\kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

Definice 4.7 Nechť je dán bod S a úsečka r. ***Koulí*** κ o středu S a poloměru r se nazýváme sjednocení všech úseček SX v prostoru, které jsou shodné s úsečkou SX.
Označujeme: koule $\kappa(S, r)$.

Definice 4.8 Nechť je dán bod S a reálné číslo $r > 0$. ***Koulí*** κ o středu S a poloměru r se nazývá množina všech bodů X v prostoru, jejichž vzdálenost od středu S je nejvýše rovna r.
Symbolicky:

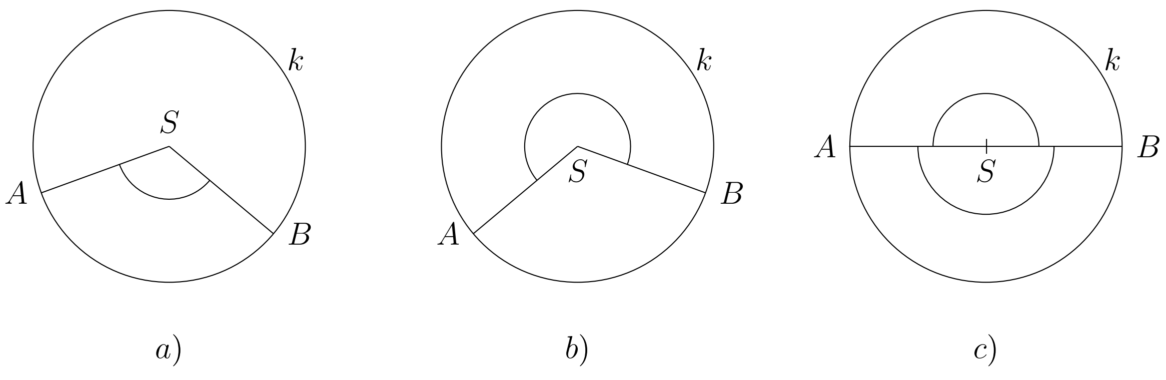
$$\text{koule } \kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

4.2 Kružnice, úhly středové a obvodové

Kružnici jsme definovali definicemi 4.1 a 4.2. V tomto odstavci si připomeneme některé další pojmy vztahující se ke kružnici a vztahy mezi nimi. Tyto pojmy, jejich vlastnosti a vztahy pak využijeme při řešení konstrukčních úloh v závěru kapitoly 4.

Jsou-li A, B dva různé body kružnice k, pak úsečka AB se nazývá ***tětiva*** kružnice k. Jestliže tětiva AB obsahuje střed kružnice k, nazýváme ji ***průměr*** kružnice k. Část kružnice k, která leží v jedné z polorovin s hraniční přímkou AB se nazývá ***oblouk*** kružnice k, body A, B jsou ***krajní body*** oblouku. Je-li AB průměr, nazýváme oblouky s krajními body A, B ***polokružnice***. Není-li AB průměr, pak oblouk, který leží v polorovině ABS nazýváme větší oblouk a oblouk v polorovině opačné k polorovině ABS nazýváme menší oblouk s krajními body A, B.

Definice 4.9 Nechť S je střed kružnice k a AB její tětiva, která není průměrem. Pak úhel $\sphericalangle ASB$ nazýváme ***středový úhel příslušný menšímu oblouku*** kružnice k s krajními body A, B (obr. 4.2 a). Úhel $\lessdot ASB$ nazýváme ***středový úhel příslušný většímu oblouku*** kružnice k s krajními body A, B (obr. 4.2 b). Je-li úsečka AB průměrem kružnice k, vzniknou dva přímé úhly ASB, které též nazýváme úhly středové, z nichž každý přísluší té polokružnici s krajními body A, B, která je jeho podmnožinou (obr. 4.2 c).

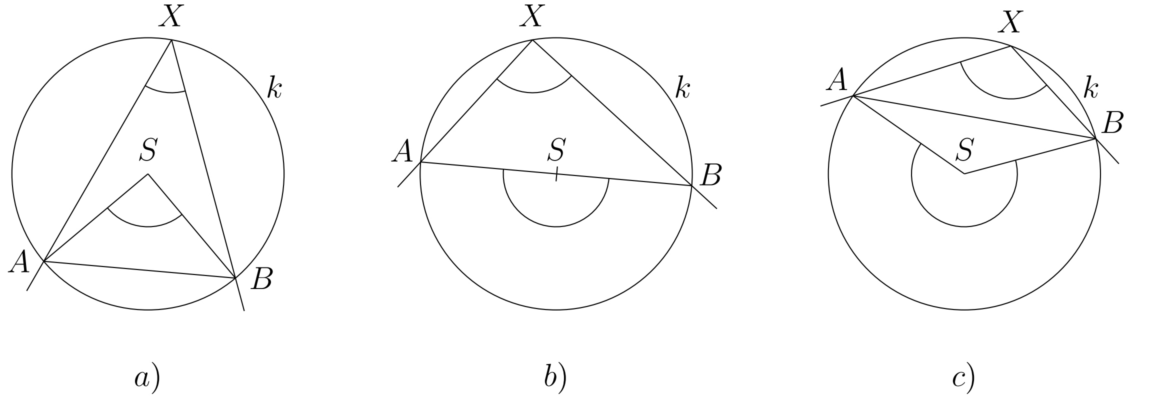


Obr. 4.2

Poznámka 4.3 Stručně je možno říci, že středový úhel ASB přísluší vždy tomu oblouku kružnice s krajními body A, B, který je jeho podmnožinou. Zřejmě platí, že shodným obloukům příslušejí v téže kružnici shodné středové úhly a naopak.

Definice 4.10 Nechť je dána kružnice k a na ní tři různé body A, B, X. Konvexní úhel $\sphericalangle AXB$ se nazývá ***obvodový úhel*** příslušný tomu oblouku kružnice k, který leží v polorovině opačné k polorovině ABX. Středový úhel ASB, který přísluší k tomuto oblouku AB se nazývá ***středový úhel příslušný k obvodovému úhlu*** $\sphericalangle AXB$.

Poznámka 4.4 Stručně je možno říci, že obvodový úhel $\sphericalangle AXB$ přísluší tomu oblouku kružnice s krajními body A, B, který je jeho podmnožinou. Obvodový a k němu příslušný středový úhel příslušejí témuž oblouku (obr. 4.3 a – c).



Obr. 4.3

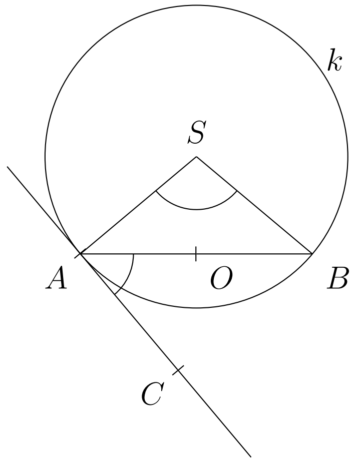
Vztah mezi obvodovým a k němu příslušným středovým úhlem vyjadřuje následující věta:

Věta 4.1 *Velikost středového úhlu v kružnici k je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice k jako daný středový úhel.*

Důkaz věty 4.1 přesahuje rámec tohoto textu a lze jej najít v uvedené literatuře. Užitím věty 4.1 lze dokázat větu 4.2:

Věta 4.2 *Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice jsou navzájem shodné.*

Definice 4.11 Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a dva její různé body A, B. V bodě A je sestrojena tečna AC kružnice k. Potom úhel $\sphericalangle BAC$ nazýváme ***úsekový úhel*** příslušný k tomu oblouku AB kružnice k, který v tomto úhlu leží. Středový úhel $\sphericalangle ASB$, který k tomuto oblouku přísluší, se nazývá středový úhel příslušný k úsekovému úhlu $\sphericalangle BAC$ (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Věta 4.3 *Velikost úsekového úhlu v kružnici k je rovna polovině velikosti k němu příslušného středového úhlu.*

■ **4.1** Důkaz věty 4.3 proveďte jako cvičení. Využijte při tom trojúhelníka AOS, kde O je střed tětivy AB (obr. 4.4).

Úsekový úhel $\sphericalangle BAC$ znázorněný na obrázku 4.4 přísluší menžímu z oblouků s krajními body A, B. Uvažujte i o úsekových úhlech příslušných k polokružnici a k většímu z oblouků s krajními body A, B a dokažte větu i pro tyto případy.

Z předcházejících vět je zřejmé, že úsekový úhel a obvodový úhel, které příslušejí k témuž oblouku kružnice, mají stejné velikosti. Toho využíváme při řešení úlohy určit množinu vrcholů všech konvexních úhlů o dané velikosti α, které procházejí danými různými body A, B (viz cvičení 4.4).

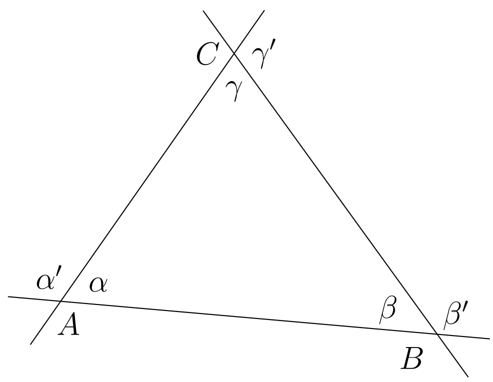
4.3 Trojúhelník, vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka, příčky trojúhelníka

Trojúhelník jsme definovali v předcházející části textu definicemi **??** a **??**. Nyní si připomeneme některé vlastnosti týkající se jeho stran, úhlů a příček.

Věta 4.4 ***(Trojúhelníková nerovnost)***
Součet velikostí kterýchkoliv dvou stran trojúhelníka je větší než velikost strana třetí.

Věta 4.4 je jednou ze základních vět elementární geometrie. Je možno ji formulovat také užitím pojmů grafický součet stran trojúhelníka. Také věta o součtu velikostí (resp. o grafickém součtu) všech vnitřních úhlů trojúhelníka patří mezi základní věty elementární geometrie – viz cvičení 4.2.

Definice 4.12 ***Vnějším úhlem trojúhelníka*** nazýváme úhel, který je vedlejší k jeho vnitřnímu úhlu.



Obr. 4.5

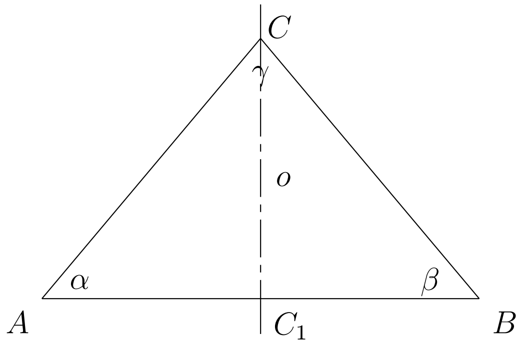
Věta 4.5 *Velikost vnějšího úhlu trojúhelníka je rovna součtu velikostí jeho vnitřních úhlů, k nimž tento úhel není vedlejší.*

Důsledek věty 4.5: Vnější úhel trojúhelníka při daném vrcholu je větší než kterýkoliv jeho vnitřní úhel při zbývajícím vrcholu.

Věta 4.6 ***(O stranách a protějších úhlech trojúhelníka)***
Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly. Proti větší ze dvou stran leží větší vnitřní úhel.

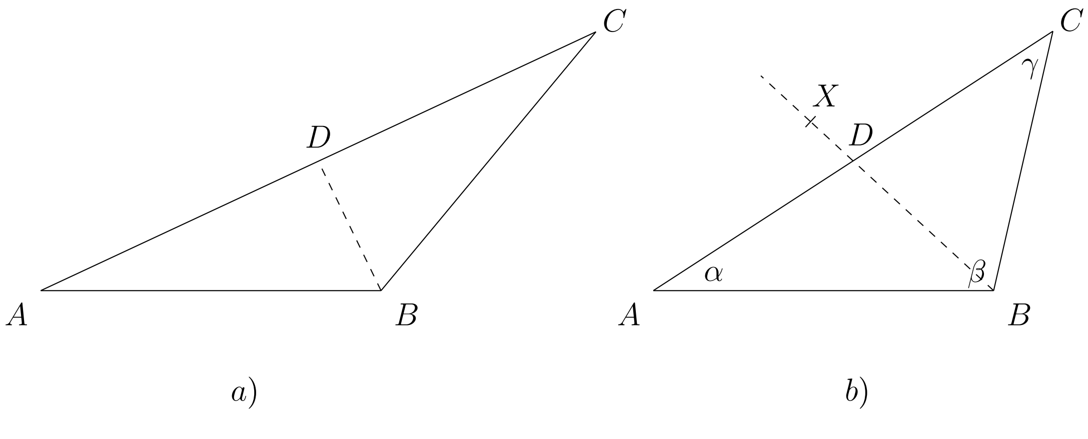
Platí též: *Proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany, proti většímu ze dvou vnitřních úhlů leží větší strana.*

Důkaz: *a) Nejdříve dokážeme, že proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly. Uvažujme trojúhelník* ABC *a nechť* $AC \cong BC$ *(obr. 4.6). Dokážeme, že* $\alpha \cong \beta$. *Sestrojme osu úhlu* $\sphericalangle ACB$ *a její průsečík se stranou* AB *označme* C_1. *Platí* $AC \cong BC$, $CC_1 \cong CC_1$, $\sphericalangle ACC_1 \cong \sphericalangle BCC_1$, *tj.* $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ *podle věty sus. Platí tedy* $\sphericalangle CAC_1 \cong \sphericalangle CBC_1$, *tj.* $\alpha \cong \beta$.



Obr. 4.6

b) Nyní dokážeme tvrzení obrácené, tj. že proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany. Uvažujme opět trojúhelník ABC *a nechť je* $\alpha \cong \beta$. *Dokážeme, že* $BC \cong AC$. *Sestrojíme opět osu úhlu* $\sphericalangle ACB$ *a její průsečík se stranou* AB *označme* C_1 *(obr. 4.6). Platí* $\sphericalangle ACC_1 \cong \sphericalangle BCC_1$ *a* $\alpha \cong \beta$. *Trojúhelníky* ACC_1 *a* BCC_1 *se tedy shodují ve dvou úhlech, z čehož vyplývá, že se shodují ve všech třech úhlech a navíc mají stranu* CC_1 *společnou. Tj. podle věty usu platí* $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ *a odtud již plyne* $BC \cong AC$, *což jsme měli dokázat.*



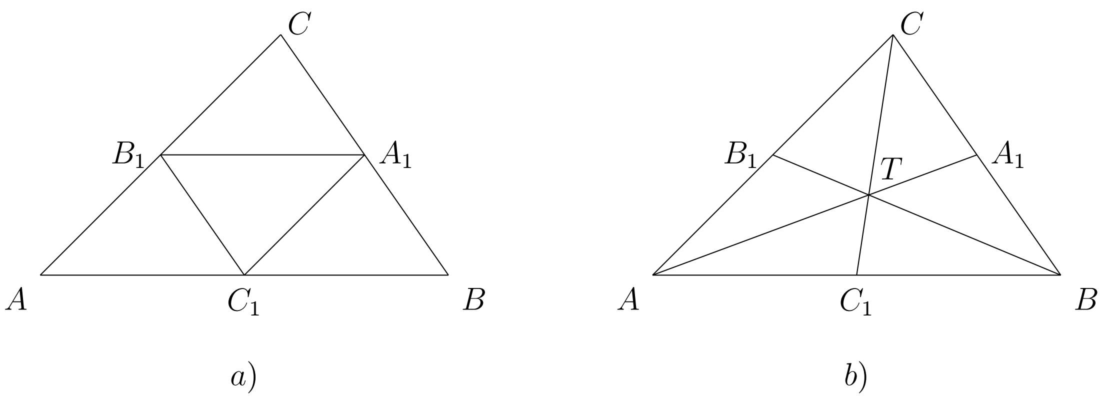
Obr. 4.7

Trojúhelník ABC *je rovnoramenný s hlavním vrcholem* C. *Ze shodnosti* $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ *plyne, že* C_1 *je střed strany* AB *a že úhly* $\sphericalangle AC_1C$, $\sphericalangle BC_1C$ *jsou pravé, neboť se jedná o shodné vedlejší úhly. Jako vedlejší výsledek tedy dostáváme, že osa vnitřního úhlu rovnoramenného trojúhelníka při jeho hlavním vrcholu je kolmá na jeho základnu a prochází jejím středem.*

c) Nyní se zaměříme na důkaz tvrzení, že proti větší starně trojúhelníka leží větší vnitřní úhel. Nechť je dán trojúhelník ABC *a nechť* $AC > BC$ *(obr. 4.7 a)). Dokážeme, že* $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$. *Sestrojme bod* $D \in AC$ *tak, že je* $BC \cong DC$. *Podle části a) důkazu věty 4.6 platí, že* $\sphericalangle CDB \cong \sphericalangle CBD$. *Úhel* $\sphericalangle CDB$ *je vnějším úhlem trojúhelníka* ABD, *a je tedy větší než* $\sphericalangle CAB$. *Úhel* $\sphericalangle ABC$ *je však větší než* $\sphericalangle CBD$, *neboť je roven grafickému součtu úhlů* $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle ABD$ *a úhel* $\sphericalangle ABD$ *není nulový (podle předpokladu je* $AC > BC$, *a tedy* $A \neq D$*). Z uvedených vztahů plyne:* $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle CDB$, $\sphericalangle CDB > \sphericalangle CAB$ *a tedy* $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$, *což jsme měli dokázat.*

d) Zbývá dokázat, že proti většímu úhlu trojúhelníka leží větší strana. Nechť je dán trojúhelník ABC *a nechť* $\alpha < \beta$. *Dokážeme, že* $AC > BC$ *(obr. 4.7 b)). Sestrojme úhel* $\sphericalangle ABX$ *shodný s úhlem* α *tak, že polopřímka* BX *náleží polorovině* ABC. *Protože je* $\alpha < \beta$, *je* $\sphericalangle ABX < \beta$ *a* $\beta = \sphericalangle ABX + \sphericalangle XBC$. *Body* A, C *náležejí opačným polorovinám s hraniční přímkou* BX, *a tedy existuje bod* D *tak, že* $D \in \mapsto BX \cap AC$. *Podle části b) důkazu věty 4.6 je* $AD \cong BD$. *Z věty 4.4 plyne pro trojúhelník* BCD, *že* $BD + DC > BC$. *Platí* $AD \cong BD$, *a tedy* $AD + DC > BC$, *tj.* $AC > BC$, *což jsme měli dokázat.* $\square$

Definice 4.13 V trojúhelníku ABC označme po řadě A_1, B_1, C_1 středy stran a, b, c. Úsečky A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 se nazývají ***střední příčky trojúhelníka*** ABC příslušné po řadě ke stranám c, a, b (obr. 4.8 a). Úsečky AA_1, BB_1, CC_1 se nazývají ***těžnice trojúhelníka*** ABC (obr. 4.8 b).

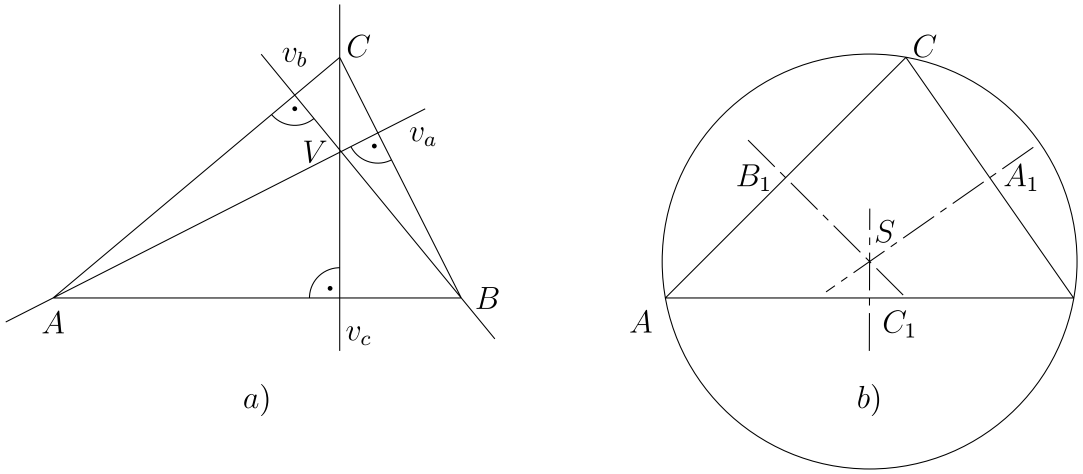


Obr. 4.8

Věta 4.7 *Střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná se stranou tohoto trojúhelníka, jejíž střed neobsahuje, a její velikost se rovná polovině velikosti této strany.*

Věta 4.8 *Těžnice trojúhelníka* ABC *procházejí týmž bodem* T, *zvaným těžiště trojúhelníka. Těžiště* T *dělí každou těžnici na dvě úsečky, z nichž ta část, která obsahuje vrchol trojúhelníka, je dvojnásobkem druhé části (obr. 4.8 b).*

Definice 4.14 V trojúhelníku ABC označme po řadě v_a, v_b, v_c kolmice vedené vrcholy A, B, C trojúhelníka ABC k přímkám BC, AC, AB. Přímky v_a, v_b, v_c se nazývají ***výšky trojúhelníka*** ABC (obr. 4.9).



Obr. 4.9

Poznámka 4.5 Výškou též nazýváme úsečku, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a průsečík kolmice vedené tímto vrcholem k přímce, v níž leží protější strana, s touto přímkou. Také velikost této úsečky se nazývá výška. Pojem *výška trojúhelníka* má tedy trojí význam. Proto je třeba, aby bylo vždy alespoň z kontextu zřejmé, o který z významů jde. Ve větě 4.9 je výška chápána ve smyslu definice 4.14.

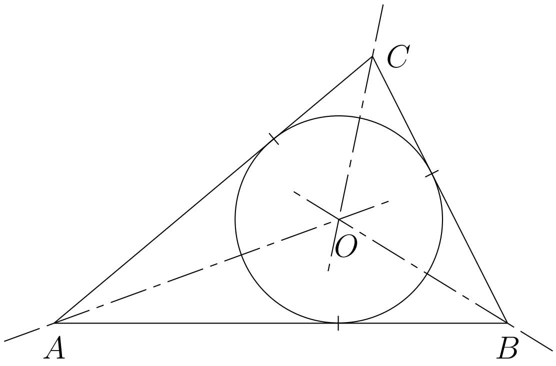
Věta 4.9 *Výšky trojúhelníka ABC procházejí týmž bodem V, zvaným průsečík výšek nebo též ortocentrum trojúhelníka ABC (obr. 4.9 a)).*

Definice 4.15 ***Osami stran*** trojúhelníka ABC nazýváme osy úseček AB, BC a AC.

Věta 4.10 *Osy stran trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané (obr. 4.9 b)).*

Mezi příčky trojúhelníka řadíme též osy jeho vnitřních úhlů. Pro jejich vzájemnou polohu platí věta 4.11.

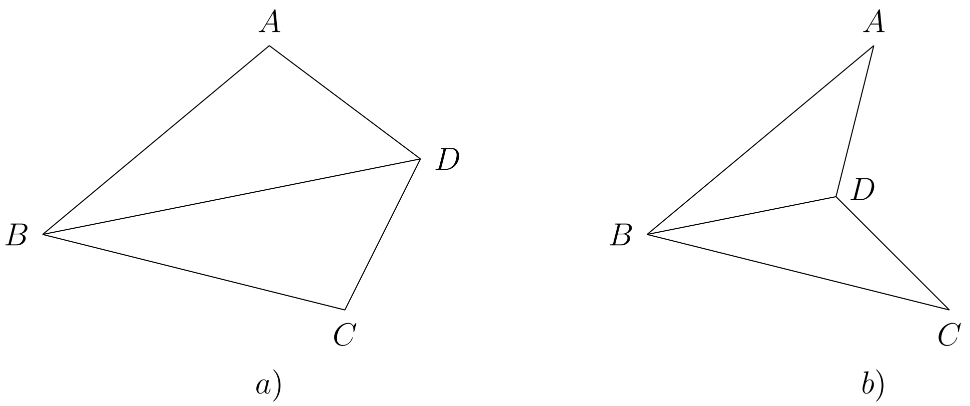
Věta 4.11 *Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané (obr. 4.10).*



Obr. 4.10

4.4 Čtyřúhelník, třídění čtyřúhelníků

Definice 4.16 Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v téže rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Sjednocení trojúhelníků ABD a BDC nazveme ***čtyřúhelníkem*** $ABCD$ právě tehdy, když průnikem těchto trojúhelníků je úsečka BD (obr. 4.4).



Obr. 4.11

Čtyřúhelník na obrázku a) je konvexní, na obrázku b) je nekonvexní. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je možno definovat také jako průnik polorovin:
Konvexní čtyřúhelník $ABCD = \mapsto ABC \cap \mapsto BCD \cap \mapsto CDB \cap \mapsto ADB$, přičemž ovšem předpokládáme, že body A, B, C, D leží v téže rovině a žádné tři z nich neleží v přímce.

Body A, B, C, D nazýváme *vrcholy čtyřúhelníka* $ABCD$, úsečky AB, BC, CD, DA jeho *strany* a úsečky AC, BD jeho *úhlopříčky*. *Vnitřními úhly* čtyřúhelníka z definice 4.16 nazýváme tyto úhly: $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD \cup \sphericalangle DBC$ a $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB \cup \sphericalangle BDC$. Pro součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka platí věta 4.12.

Věta 4.12 *Součet velikostí všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka je roven* $360°$.

Čtyřúhelníky můžeme třídit podle různých hledisek, např. podle toho, zda mají některé dvojice stran rovnoběžné, případně shodné, zda jsou některé strany na sebe kolmé apod. Pro zopakování uvádíme následující třídění čtyřúhelníků:

$$\textbf{Čtyřúhelníky} \begin{cases} \text{různoběžníky} \\ \text{čtyřúhelníky s rovnoběžnými stranami} \begin{cases} \text{lichoběžníky} \\ \text{rovnoběžníky} \begin{cases} \text{pravoúhelníky} \begin{cases} \text{obdélníky} \\ \text{čtverce} \end{cases} \\ \text{kosodélníky} \begin{cases} \text{kosodélníky} \\ \text{kosočtverce} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Jiné třídění čtyřúhelníků lze provádět např. vzhledem k vlastnostem uhlopříček čtyřúhelníka:

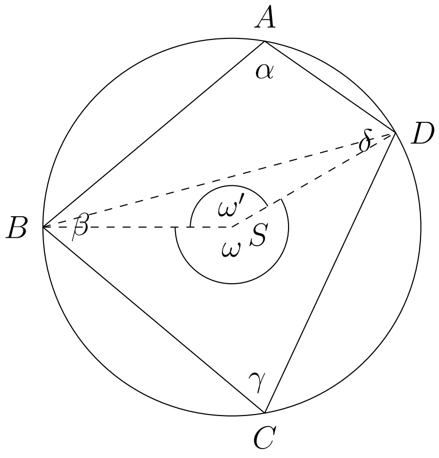
$$\text{Uhlopříčky čtyřúhelníka} \begin{cases} \text{kolmé} \begin{cases} \text{shodné} \begin{cases} \text{půlí se – } \textbf{čtverce} \\ \text{nepůlí se} \end{cases} \\ \text{neshodné} \begin{cases} \text{půlí se – } \textbf{kosočtverce} \\ \text{nepůlí se} \end{cases} \end{cases} \\ \text{kosé} \begin{cases} \text{shodné} \begin{cases} \text{půlí se – } \textbf{obdélníky} \\ \text{nepůlí se} \end{cases} \\ \text{neshodné} \begin{cases} \text{půlí se – } \textbf{kosodélníky} \\ \text{nepůlí se} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

V závěru odstavce o čtyřúhelnících zavedeme ještě dva nové pojmy, a to pojem tětivového a pojem tečnového čtyřúhelníka.

Definice 4.17 Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která prochází body A, B, C, D nazýváme tento čtyřúhelník ***tětivový***.

Věta 4.13 *Součet velikostí každých dvou protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníka je roven* $180°$.

Důkaz: *Vyjdeme-li z označení v obrázku 4.12, je třeba dokázat, že* $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. *Platí* $\omega + \omega' = 360°$. *Podle věty 4.1 platí, že* $\omega = 2\alpha$, $\omega' = 2\gamma$. *Tedy* $2\alpha + 2\gamma = \omega + \omega' = 360°$ *toho bezprostředně plyne, že* $\alpha + \gamma = 180°$. *Odtud z věty 4.12 pak plyne též, že* $\beta + \delta = 180°$.



Obr. 4.12

Definice 4.18 Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která se dotýká všech jeho stran, nazýváme tento čtyřúhelník ***tečnový***.

Věta 4.14 *Součty velikostí protějších stran tečnového čtyřúhelníka jsou si rovny.*

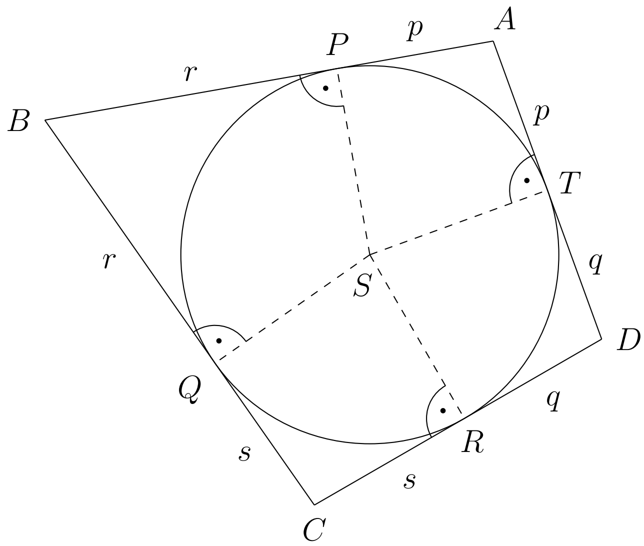
Důkaz: *Vyjdeme-li z označení v obrázku 4.13, je třeba dokázat, že* $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$. *Trojúhelníky* SBP *a* SBQ *jsou shodné podle věty Ssu (*SB *je společná strana ,* $SP \cong SQ$, $\sphericalangle SPB = \sphericalangle SQB$*). Ze shodnosti těchto trojúhelníků vyplývá, že* $BP \cong BQ$. *Podobně se ukáže, že* $CQ \cong CR$, $DR \cong DT$ *a* $AT \cong AP$. *Nechť* $|AP| = p$, $|BP| = r$, $|CQ| = s$ *a* $|DR| = q$. *Pak je*

$$|AD| + |BC| = p + q + r + s,$$

$$|AB| + |DC| = p + r + s + q.$$

Platí tedy $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$, *což jsme měli dokázat.*

Definice 4.19 Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, se nazývá čtyřúhelník ***dvojstředový***.



Obr. 4.13

Cvičení:

■ **4.2** Analogicky k větě 4.4 vyslovte větu o součtu velikostí (resp. o grafickém součtu) všech vnitřních úhlů trojúhelníka a dokažte ji.

■ **4.3** Zdůvodněte větu 4.12.

■ **4.4** Je dána úsečka AB.
a) Sestrojte množinu všech vrcholů konvexního úhlu $\sphericalangle ACB = \gamma$, jehož ramena procházejí krajními body úsečky AB.
b) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li $|AB| = 6$, $\gamma = 60°$, $v_C = 4$.

■ **4.5** Je-li v rovnoramenném trojúhelníku ABC úhel při základně AB roven trojnásobku úhlu při vrcholu C a rozdělí-li se úhel $\sphericalangle BAC$ při základně na tři shodné úhly (tak, že M, N jsou takové body strany BC, pro něž platí $\sphericalangle NAB \cong \sphericalangle MAN \cong \sphericalangle CAM$), pak platí $AB \cong AN \cong BM$, $AM \cong CM$. Dokažte.

■ **4.6** Bodem A ležícím vně kružnice $k(S, r)$ je vedena sečna CD tak, že $AC < AD$ a $|AC| = r$. Dokažte, že

$$\sphericalangle ASC = \frac{1}{3}\sphericalangle BSD,$$

kde bod B je průsečík přímky AS s kružnicí k takový, že S leží mezi body A, B.

■ **4.7** Uvnitř trojúhelníku ABC zvolte bod S. Dokažte, že součet úseček SA, SB, SC je větší než poloviční součet stran daného trojúhelníku, tj. že

$$SA + SB + SC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

■ **4.8** Dakažte, že součet úseček, které spojují vnitřní bod P trojúhelníku s krajními body jedné jeho strany, je menší než součet zbývajících dvou stran daného trojúhelníku.

■ **4.9** Přímka o je osou úsečky AB. Bod X je libovolný vnitřní bod poloroviny oA. Dokažte, že platí: $AX < BX$.

■ **4.10** Bod U je vnitřním bodem trojúhelníku ABC.
Dokažte, že platí: $\sphericalangle AUB > \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle AUC > \sphericalangle ABC$.

■ **4.11** Leží-li bod X na ose daného konvexního úhlu AVB, pak má od jeho ramen stejné vzdálenosti. Dokažte.

■ **4.12** Splývá-li těžnice trojúhelníka s jeho výškou, je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

■ **4.13** V trojúhelníku ABC je $\sphericalangle BAC = \alpha = 50°$, $\sphericalangle ABC = \beta = 60°$, osa $\sphericalangle ABC$ protíná stranu AC v bodě D. Seřaďte úsečky AB, BC, CD, AD, AC, BD podle velikosti.

■ **4.14** Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka $A_1B_1C_1$, jehož vrcholy jsou průsečíky os vnějších úhlů daného trojúhelníka ABC.

■ **4.15** Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC a bod D, který je středem jeho základny AB. Bodem D jsou vedeny kolmice k ramenům AC, BC trojúhelníka ABC. Jejich paty jsou označeny M, N. Dokažte, že $\triangle DMC \cong \triangle DNC$.

■ **4.16** Sestrojte trojúhelník ABC je-li dáno:

a)	c, b, t_c	b)	α, c, t_c	c)	a, v_a, b
d)	a, α, v_b	e)	b, c, v_a	f)	α, v_b, r_v
g)	b, γ, v_c	h)	γ, v_a, v_b	i)	c, v_a, v_b
j)	a, v_a, v_b	k)	γ, v_a, v_c	l)	r_o, v_c, t_c
m)	a, b, t_c	n)	α, β, r_v	o)	α, β, r_o
p)	b, β, v_b	q)	a, β, r_v	r)	c, t_a, t_b
s)	b, β, t_a	t)	a, t_a, t_b	u)	a, v_a, t_b
v)	t_a, t_b, t_c	w)	t_a, t_b, γ	z)	t_a, v_a, v_b

kde r_o je poloměr kružnice opsané a r_v je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

■ **4.17** Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jsou-li dány velikosti uhlopříček e, f a velikost výšky v_a.

■ **4.18** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, jsou-li dány velikosti uhlopříček e, f, velikost úhlu $DAB = \alpha$ a velikost úhlu $AEB = \omega$, kde E je průsečík uhlopříček.

■ **4.19** Sestrojte trojúhelník ABC je-li dáno:

a)	c, b, t_c	b)	α, c, t_c	c)	a, v_a, b
d)	a, α, v_b	e)	b, c, v_a	f)	α, v_b, r_v
g)	b, γ, v_c	h)	γ, v_a, v_b	i)	c, v_a, v_b

■ **4.20** Sestrojte různoběžník $ABCD$, je-li dáno: velikost strany AB, velikost strany BC, velikosti obou uhlopříček AC, BD a velikost úhlu $AEB = \omega$, kde E je průsečík uhlopříček.

■ **4.21** Sestrojte kružnici k, je-li dána její tečna t s bodem dotyku T a další její tečna q.

■ **4.22** Největší strana konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ je AB, nejmenší CD. Dokažte, že $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ADC$.

■ **4.23** Uvažujte množinu všech čtyřúhelníků a čtyři její podmnožiny A, B, C, D. Přitom:

A je množina všech čtyřúhelníků s alespoň jednou dvojicí rovnoběžných stran,

B je množina všech čtyřúhelníků, jejichž uhlopříčky se půlí,

C je množina všech čtyřúhelníků, jejichž uhlopříčky jsou shodné,

D je množina všech čtyřúhelníků, jejichž uhlopříčky jsou kolmé.

Nakreslete Vennův diagram pro tyto množiny a určete vlastnosti čtyřúhelníků, které by byly znázorněny v jednotlivých elentárních polích diagramu. Pro každé pole znázorněte alespoň jeden čtyřúhelník příslušných vlastností.

■ **4.24** Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, tj. čtyřúhelník, který je současně tětivový i tečnový (viz definice 4.17 a 4.18), se nazývá ***dvojstředový***. Dovedete určit alespoň jeden dvojstředový čtyřúhelník, který není čtvercem?

4.5 Okolí bodu

Definice 4.20 Nechť M je bodová množina (rovina, prostor, popř. jiná bodová množina), A je bod, $A \in M$, $\delta \in \mathbb{R}^+$. Množina bodů $O_M(A,\delta) = \{X \in M : |AX| < \delta\}$ se nazývá ***sférické okolí bodu*** A ***v množině*** M.

Příklad 4.1 Množina M, ve které definujeme okolí daného bodu je podstatná, neboť v různých množinách potom může okolí stejného bodu vypadat naprosto odlišně. Na obrázku 4.14 je znázorněno sférické okolí bodu A v množině:

a) $M_1 = \rho$, kde ρ je rovina, $O_\rho(A,\delta) = \{X \in \rho : |AX| < \delta\}$,

b) $M_2 = Z$, kde Z je prostor, $O_Z(A,\delta) = \{X \in Z : |AX| < \delta\}$.

Zatímco v případě a) je sférickým okolím bodu A vnitřní oblast kružnice o poloměru δ, tak v případě b) se jedná o vnitřní oblast kulové plochy o poloměru δ.

Obr. 4.14

Definice 4.21 Útvar U se nazývá ***omezený v množině*** M právě tehdy, když existuje takový bod A, $A \in M$ a takové okolí $O_M(A,\delta)$, že útvar U je podmnožinou tohoto okolí.
Útvar, který není omezený se nazývá ***neomezený***.

Definice 4.22
Bod A se nazývá ***vnitřní bod*** útvaru U v množině M právě tehdy, když existuje alespoň jedno jeho okolí v množině M, jehož každý bod je bodem útvaru U.
Bod B se nazývá ***vnější bod*** útvaru U v množině M právě tehdy, když existuje alespoň jedno jeho okolí v množině M, jehož žádný bod nepatří útvaru U.
Bod C se nazývá ***hraniční bod*** útvaru U v množině M právě tehdy, když každé jeho okolí v množině M obsahuje jak body, které patří útvaru U, tak body, které nepatří útvaru U.

Obr. 4.15

Definice 4.23 Množina všech hraničních bodů útvaru U se nazývá ***hranice*** útvaru U. Množina všech vnitřních bodů útvaru U se nazývá ***vnitřek*** útvaru U. Množina všech vnějších bodů útvaru U se nazývá ***vnějšek*** útvaru U.

Příklad 4.2 Nechť množinou M je roviina ρ a útvarem U je úsečka AB (obr. 4.16). Pak každý bod úsečky AB je hraničním bodem této úsečky vzhledem k rovině ρ. V rovině ρ je tedy hranicí útvaru, kterým je úsečka AB, právě tato úsečka. Bod C je vnější bod úsečky AB vzhledem k rovině ρ. Vnějšek uvažovaného útvaru, úsečky AB, je tedy množina $M = \rho - AB$.

Obr. 4.16

Poznámka 4.6 Často se setkáváme s nesprávným užitím termínu „vnitřek krušnice". Chápeme-li kružnici jako podmnožinu roviny. Každý bod kružnice vzhledem k rovině, v níž kružnice leží, je totiž hraničním bodem kružnice a vnitřek kružnice je prázdná množina. Terminologicky správné je užívat pojmy *vnitřní oblast kružnice* a *vnější oblast kružnice.*

Definice 4.24 Útvar U se nazývá ***uzavřený*** v množině M právě tehdy, když obsahuje všechny své hraniční body (vzhledem k množině M).
Útvar U se nazývá ***otevřený*** v množině M právě tehdy, když neobsahuje žádný svůj hraniční bod.

Definice 4.25 Říkáme, že útvary U_1, U_2 se nepřekrývají v množině M právě tehdy, když průnik útvarů U_1, U_2 je podmnožinou průniku jejich hranic.
Jinak: Útvary U_1, U_2 se nepřekrývají v množině M právě tehdy, když jejich průnik neobsahuje žádný bod, který je vnitřním bodem alespoň jednoho z útvarů U_1, U_2 (vzhledem k množině M).

Příklad 4.3 Jsou dány trojúhelníky ABC a KLM, které leží v rovině ρ. Trojúhelníky ABC a KLM na obrázku 4.17 a), b), c) se nepřekrývají v rovině ρ, trojúhelníky ABC a KLM na obrázku 4.17 d), e) se v rovině ρ překrývají.

Obr. 4.17

4.6 Mnohoúhelník

Definice 4.26 ***Lomenou čárou*** $A_0A_1A_2\ldots A_n$, $(n > 1)$, rozumíme sjednocení všech úseček $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n$ konečné posloupnosti úseček, z nichž žádná neleží v přímce, která obsahuje předcházející (následující) úsečku této posloupnosti (obr. 4.18).

Obr. 4.18

Lomenou čárou tedy rozumíme sjednocení konečného počtu úseček $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n$, z nichž každé dvě sousedící mají společný pouze jeden (krajní) bod a neleží v téže přímce.

Body $A_0A_1A_2\ldots$ nazýváme vrcholy lomené čáry, úsečky $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots$ nazýváme strany lomené čáry, strany úseček $A_{k-1}A_k,\ A_kA_{k+1}$, $k = 1,\ldots,n-1$, nazýváme sousední strany lomené čáry.

Definice 4.27 ***Jednoduchou lomenou čárou*** rozumíme lomenou čáru, jejíž každé dvě nesousedící strany jsou disjunktní – tzn. žádné dvě nesousedící strany nemají společný bod (obr. 4.19).

Obr. 4.19

Definice 4.28 ***Jednoduchou uzavřenou lomenou čárou***rozumíme jednoduchou lomenou čáru $A_0A_1A_2\ldots A_n$, kde $A_0 = A_n$ (obr. 4.20).

Obr. 4.20

Jednoduchá uzavřená lomená čára má důležité vlastnosti. Rozděluje totiž všechny body roviny, které jí nepatří, do dvou neprázdných podmnožin takových, že mezi každými dvěma body patřícími různým podmnožinám leží alespoň jeden bod lomené čáry. Pro každé dva různé body téže podmnožiny pak platí, že je lze spojit úsečkou nebo jednoduchou lomenou čarou, přičemž tyto útvary leží v této podmnožině. Tyto dvě podmnožiny nazveme ***vnitřní*** a ***vnější oblast*** jednoduché lomené čáry.

Přesněji: Nechť L je jednoduchá uzavřená lomená čára $A_0A_1A_2\ldots A_n$, $(A_0 = A_n)$. Označme M množinu všech bodů roviny, které nepatří jednoduché čáře L a dále označme R relaci definovanou takto: X, Y jsou v relaci R, právě tehdy, když existuje taková lomená čára obsahující body X, Y, která nemá s jednoduchou uzavřenou lomenou čárou L žádný společný bod.