Základy matematiky (MA-0001)

verze prosinec 2023

Břetislav Fajmon

Obsah

Úvod

Tato skripta jsou vytvářena jako podpora přednášek i cvičení do předmětů Základy matematiky (MA-0001) na PdF MU Brno. První základní věcí zde probíranou jsou **principy logického usuzování a metody prokazování platnosti matematických tvrzení** – v textu čtenář najde tuto problematiku v prvních třech kapitolách a ve čtrnácti typech důkazů. Tyto důkazy pak hrají roli při potvrzení platnosti asi sedmnácti matematických vět v textu uvedených a jsou příkladem práce s matematickou precizností, kdy uživatel matematiky nejen zjistí, že platí určité vzorce a zákonitosti, ale také by měl možnost se přesvědčit, proč platí, a to na základě známých pojmů a matematických tvrzení dokázaných již dříve.

Druhou základní věcí tohoto předmětu některé zmínky **o množinách a množinových operacích; dále několik vět o dělitelnosti celých čísel a charakteristické vlastnosti čísel racionálních**. Těm budou věnovány týdny 4 a 5.

Třetím tématem a nejdůležitějším pojmem tohoto předmětu je **pojem relace**. Studenti prozkoumají některé vlastnosti známých relací $\leq$, $\subseteq$, relace dělitelnosti $|$, a pak se seznámí s faktem, že při matematicky přesném popisu jsou na pojmu binární relace založeny pojmy ekvivalence, uspořádání, zobrazení, posloupnost, funkce a binární operace. Výstavbě těchto pojmů a jejich vlastnostem budou věnovány týdny 6 až 9.

Čtvrtým tématem tohoto předmětu budou základní reálné **funkce jedné proměnné a jejich vlastnosti** – probíráno v týdnech 10 až 13. S určováním vlastností funkcí souvisí dovednost i nakreslit jejich graf, která bude u těchto základních funkcí procvičována s největším důrazem, protože poskytuje jakýsi „geometrický“ či grafický obraz o předpisech funkcí, které matematika dodává dalším oborům lidského bádání a podnikání.

Pátou základní věcí, která prostupuje celým textem, je úkol naučit se **rozumět matematickému zkrácenému (symbolickému) zápisu** – jedná se vlastně o jakýsi symbolický jazyk matematiky, který je hojně využíván v jakýchkoli matematických metodách a popisech. Dovednost spočívající ve čtení a psaní (používání) tohoto stručného matematického zápisu bude také v předmětu zkoušena, a rozvíjena dále v předmětech Algebra 1 a Algebra 2.

Tento text vznikl v roce 2017-2020. V roce 2023 se s rostoucí zkušeností z výuky text jeví nedostatečným a je přepracováván za pochodu v průběhu podzimního semestru 2023, tam kde něco zbývá doplnit, bude napsáno DOPLNIT.

Břetislav Fajmon, Brno, říjen 2023

1 Logické spojky, univerzální výroky, důkaz výčtem pravdivostních hodnot

1.1 Přednáška

Zaměřmě se nejprve na následující odpověď na otázku o významu a roli matematiky: **podstatou matematiky je přesné a logické odvozování**.

Řecké slovo *mathéma* = nauka (věda) či poučka, platné či pravdivé tvrzení – tj. matematika je vědou založenou na přesném vyjadřování, vědou o pravdách, jejichž platnost byla prokázána. Zajímají ji výroky s pravdivostní hodnotou „pravdivý“ – ty nazývá matematickými větami (teorémami)[1]

Definice 01: Výrok je písemně zaznamenatelné tvrzení, kterému lze v daných souvislostech jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu – výroky jsou tedy taková tvrzení, která lze označit buď za pravdivá (= s pravdivostní hodnotou 1), nebo za nepravdivá (= s pravdivostní hodnotou 0).

A) Zákony logiky a filosofie.

Podstatou přesného či správného vyjadřování jsou tři zákony, na kterých stojí nejen matematika, ale i filosofie:

- **Zákon sporu: Nemůže současně platit výrok i jeho negace**[2]. Jinými slovy, pokud při logickém usuzování dospějeme k tomu, že platí současně výrok i jeho negace, říkáme, že nastal spor = kontradikce (protiřečení, protimluv), a to znamená, že některý z předpokladů našeho usuzování má nesprávnou pravdivostní hodnotu.

- **Zákon vyloučení třetího (= princip pravdivostní dvouhodnotovosti): Buď platí výrok, nebo jeho negace, ale je vyloučena třetí možnost.** Znáte nějakou situaci, kde nastanou více než uvedené dvě možnosti? V životě někdy máme více než dvě řešení, jak se zachovat, a při výběru jedné varianty jednání tím pádem všechny ostatní vylučujeme – ovšem tento výběr z více než dvou možností je něco jiného než fakt, že při popisu reality používáme dvouhodnotovou logiku pravda/nepravda; pro každou z více než dvou možností se totiž rozhodujeme „dvouhodnotově“: buď si ji zvolíme, nebo ne.

- **Zákon negace negace: Negací negace dostáváme zase původní výrok**[3]**.**

Příklad 1.1. Všechny tři zákony přesného vyjadřování platí u následujících dvou výroků:

výrok A : $2+2=4$; jeho negace je ¬A: $2+2 \neq 4$. Negací negace dostaneme zase původní výrok A. Taktéž nemůže platit současně A i $\neg A$. A platí buď A, nebo $\neg A$ a je vyloučena třetí možnost.

[1] Slovo theóró (= vidím, zřím) je též z řečtiny, tj. teoréma = něco, co se nahlédlo a přijalo jako pravda ... ovšem nikoli subjektivní pravda, ale objektivní, která nezávisí na nahlížiteli.

[2] Negaci výroku definujeme jako výrok, který popírá platnost původního výroku.

[3] Respektive: Negací negace dostaneme výrok ekvivalentní původnímu výroku.

výrok B : Berlín leží v Evropě; jeho negace $\neg B$: Berlín neleží v Evropě. Negací negace dostaneme zase původní výrok B. Taktéž nemůže platit současně B i $\neg B$. Platí buď B, nebo $\neg B$ a je vyloučena třetí možnost. $\star$

V dalším budeme pod výroky a matematickými tvrzeními vždy rozumět ta, která splňují uvedené tři zákonitosti.

Definice 02: Velká písmena např. A, B budeme nazývat výrokové proměnné, protože jimi lze označovat různé výroky.

B) Logické spojky

Výroky, nebo i jejich schematické znázornění pomocí výrokových proměnných, lze spojovat do složených struktur pomocí tzv. (**definice 03**) logických spojek – tyto logické spojky lze vyjádřit slovně, nebo i symboly: Uveďme nyní základní přehled těchto logických spojek:

- výrok $\neg A$ nazveme negací[4] (**definice 04**) výroku A, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroku A a jeho negace $\neg A$ platí:

$p(A)$	$p(\neg A)$
1	0
0	1

  Symbol $\neg$ tedy představuje negaci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze tuto negaci vyjádřit například změnou slovesa v jednoduchém výroku (rovná se ... nerovná se, leží ... neleží – viz předchozí příklad), nebo uvedením slovního spojení „není pravda, že“ před výrok, který negujeme.

- výrok $A \wedge B$ nazveme (**definice 05**) konjunkcí (spojením) výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich konjunkce vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

  Symbol $\wedge$ tedy představuje konjunkci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze konjunkci vyjádřit spojkou „a“, „a současně“, „a přitom“, atd.

- výrok $A \vee B$ nazveme (**definice 06**) disjunkcí výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich disjunkce vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

[4] V některých učebnicích je negace výroku A označována i symbolem $\overline{A}$ nebo A'.

Symbol $\vee$ tedy představuje disjunkci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze disjunkci vyjádřit spojkou „nebo“ – tato spojka je ovšem uvedena ve významu nevylučovacím (disjunkce je pravdivá, pokud je pravdivý aspoň jeden z dílčích výroků, tedy mohou být pravdivé současně oba dílčí výroky):

Příklad 1.2. Pozor na rozdíl u spojky „nebo“ mezi běžným významem v češtině a významem matematickým[5]: Uvažujme následující tři výroky:

(a) Zítra buď pojedu do Prahy, nebo nepojedu.

(b) Dnes večer půjdu do kina nebo do divadla.

(c) Za deště nebo mlhy zůstanu doma.

Výrok (a) vyjadřuje, že nastane právě jedna ze dvou možností. Výrok (b) bude pravdivý, když nestane jedna nebo obě z daných možností (kino nebo divadlo). Výrok (c) znamená, že při výskytu aspoň jedné z možností (déšť nebo mlha) zůstanu doma, ale zůstanu doma také při výskytu obou možností současně (takzvané „nevylučovací nebo“). Výrok (c) je ve významu disjunkce, výrok (a) ve významu ostré disjunkce – viz níže. Výrok (b) je sporný: pokud jím někdo myslí, že nemůže najednou jít do kina i do divadla, tak zapomněl uvést čárku, protože obě situace jsou ve významu vylučovacím a nemohou nastat současně (tj. ostré nebo, viz níže). Pokud jím někdo myslí význam nevylučovací (tj. byl by ochoten stihnout kino i divadlo), věta je gramaticky správně a je ve významu disjunkce jako věta (c).

- výrok $A \veebar B$ nazveme (**definice 07**) ostrou disjunkcí výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \veebar B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

.

Ad Příklad 1.2. Výroky (a) v předchozím příkladu je výrok ostré disjunkce. A pokud ve výroku (b) napíšeme čárku, tj. míníme jej ve významu vylučovacím, jedná se také o ostrou disjunkci.

- výrok $A \Rightarrow B$ nazveme (**definice 08**) implikací utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot z nich vytvořené implikace vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

.

[5] [2], str.31-32.

Symbol $\Rightarrow$ tedy představuje implikaci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze implikaci vyjádřit: „Pokud platí A, tak z toho plyne, že B“; „když A, tak B“; apod.

V případě platnosti implikace $A \Rightarrow B$ se výrok A (**definice 08** pokračování) nazývá dostatečná podmínka pro platnost výroku B (protože platnost výroku A dostačuje, postačuje, aby bylo zaručeno, že platí výrok B – implikaci lze tedy slovně formulovat „Platnost podmínky A je dostatečná pro to, aby platilo B“) a výrok B se nazývá (**definice 08 pokračování**) nutná podmínka, která nutně vyplývá z platnosti výroku A (slovní formulace: „pokud platí A, z toho nutně plyne, že platí i B“).

Příklad 1.3. Příklady implikace: a) Když půjde Ondra na ten večírek, půjdu i já; b) Když bude pršet, vezmu si deštník; c) Když je přirozené číslo dělitelné šesti, tak je toto číslo dělitelné i třemi.

- výrok $A \Leftrightarrow B$ nazveme (**definice 9**) ekvivalencí utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B je tabulka ekvivalence vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

.

Symbol $\Leftrightarrow$ tedy představuje ekvivalenci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze spojku ekvivalence vyjádřit: „A platí právě tehdy, když platí B“; „A tehdy a jen tehdy, když B“; a podobně.

Příklad 1.4. Příklad ekvivalence: Přirozené číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi současně.

C) Stručný matematický zápis.

Budeme postupně (opakovat a) učit se řadě symbolů stručného matematického zápisu – výstižně a přesně se vyjadřovat je jedním z cílů matematiky „na úrovni B2“, pokud bychom si vypůjčili na popis vysokoškolské úrovně matematiky označení zažité z evropského referenčního rámce výuky cizích jazyků.

- **označení 00**: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ... množina přirozených čísel; někdy také $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ... množina přirozených čísel včetně nuly;
- **označení 01**: $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ... množina celých čísel;
- **označení 02**: množina racionálních čísel

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m \in Z, \ n \in N \right\}.$$

- **označení 03**: I ... množina iracionálních čísel, tj. $R = Q \cup I$;
- **označení 04**: R ... množina reálných čísel;
- **označení 05**: C ... množina komplexních čísel;
- **označení 06**: $\neg A$ ... negace výroku A;
- **označení 07**: $A \wedge B$ ... konjunkce výroků A, B;
- **označení 08**: $A \vee B$ ... disjunkce výroků A, B;
- **označení 09**: $A \Rightarrow B$ ... implikace utvořená z výroků A, B – s významem „Když platí A, tak platí i B";
- **označení 10**: $A \Leftrightarrow B$ ... ekvivalence utvořená z výroků A, B – s významem „A platí právě tehdy, když platí B";

D) Základní kategorie při výstavbě matematiky

Matematika je věda o přesném vyjadřování, a my se nyní tento jazyk budeme učit – jinými slovy, budeme se učit a) přesně formulovat pojmy, b) přesně formulovat, ze kterých jednoduchých a platných faktů vycházíme, c) dokazovat platnost nových faktů na základě faktů samozřených nebo dokázaných už dříve.

Definice 10: (matematická) definice je přesné vymezení pojmu, z něhož je patrno, které objekty toto vymezení splňují a které ne (např. bod, úsečka, přímka, kružnice, úhel, rovnoběžka ... to vše jsou pojmy, které musíme jednoznačně definovat v tzv. Eukleidovské geometrii).

Definice 11: (matematický) axiom je tvrzení o vlastnostech pojmů či o vztazích mezi pojmy, které se nedokazuje, nýbrž všeobecně přijímá jako pravdivé (např. axiomy Euklidovské geometrie).

Definice 12: (matematická) věta je tvrzení o vlastnostech pojmů či vztazích mezi pojmy, které musíme dokázat pomocí axiomů, definic a vět dokázaných již dříve[6].

[6] Např.: střed kružnice trojúhelníku vepsané leží na průsečíku os jeho úhlů ... platnost tohoto tvrzení plyne ze vztahu mezi definicí kružnice (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od svého středu) a definicí osy úhlu (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu). Z těchto dvou definic plyne, že osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, a navíc v tomto bodě musí ležet i střed hledané kružnice. Podrobněji dokazovat nebudeme, daná skutečnost slouží jen jako příklad matematické věty, která nemusí být každému zcela zřejmá a jejíž platnost je dobré podrobněji zdůvodnit na základě definic a axiomů.

E) Důkaz výčtem pravdivostních hodnot.

Definice 13: Výroková forma[7] je výraz složený z výrokových proměnných a logických spojek vyjádřených symboly. Například implikace $A \Rightarrow B$ nebo ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ jsou výrokové formy.

Pokud nyní budeme mluvit o pravdivosti výrokových forem, učíme se takto principy správného logického usuzování, aniž bychom znali konkrétní výroky dosazené za výrokové proměnné A a B.

Typ důkazu číslo 1: Důkaz ekvivalence výrokových forem.

Sestavíme tabulku výsledných pravdivostních hodnot obou výrokových forem. Pokud na každém řádku tabulky (jeden řádek = jedna kombinace dílčích pravdivostních hodnot) mají obě formy stejné pravdivostní hodnoty, jsou ekvivalentní.

Zajímavá pravidla logického usuzování dostáváme při kombinaci několika logických spojek, jak je vidět ze dvou následujících matematických vět:

(věta 01) Výroková forma $\neg(A \wedge B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \vee (\neg B)$.

Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1): sestavíme pravdivostní hodnoty složených výrokových forem pro všechny možnosti pravdivosti dílčích výroků a porovnáme je:

$\neg(A \wedge B)$:

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg(A \wedge B))$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

; dále $\neg A \vee \neg B$):

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

.

Vidíme, že pravdivostní hodnoty výrokových forem jsou stejné na každém řádku (= pro tytéž hodnoty dílčích výroků), tj. obě výrokové formy jsou logicky ekvivalentní. Jednu formu lze ekvivalentně zaměnit tou druhou a naopak. □

Příklad 1.5. Výrok $A \wedge B$ zní: Vezmu si klobouk a vezmu si i boty.

Jeho negaci lze provést velmi pragmaticky uvedením záporky „Není pravda, že“, tj. dostaneme výrok typu $\neg(A \wedge B)$: Není pravda, že si vezmu klobouk i boty.

Matematik ovšem chce pracovat precizně a vyzkoušet i další možnosti – mimo jiné proto, že často je v jeho zájmu odstranit závorky ve složených výrokových formách (podobně jako někdy pomůže odstranit závorky při početních úpravách s proměnnými výrazy). Využije věty 1 a vysloví negaci ve tvaru $\neg A \vee \neg B$): Nevezmu si klobouk nebo si nevezmu boty (v matematickém smyslu většinou nepíšeme čárku, abychom vyjádřili, že se jedná o základní matematické „nebo“, které je nevylučovací – může tedy nastat, že si nevezmu an i klobouk, ani boty).

[7] Více matematických učebnic v češtině uvádí: Výroková formule. Autor tohoto textu si slovo „formule“ vyhrazuje pro logické odvozovací formule, ikdyž v této verzi textu zatím nejsou odvozovací formule zpracovány.

(věta 02) Výroková forma $\neg(A \vee B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

Důkaz: provedeme pomoci tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1). Velmi podobný větě 1, vhodný pro cvičení. □

Příklad 1.6. Výrok $A \vee B$ zní: Číslo 20 je dělitelné dvěma nebo třemi. Je to mimochodem výrok pravdivý.

Jeho negaci bychom mohli provést pomocí záporky „není pravda, že" – ovšem tuto možnost budeme mít na prověrce nejspíš zakázanou, aby vyučující zjistil, zda dokážeme odstranit závorky ve výrokové formě. Pokusíme se sestavit výrok typu $\neg A \wedge \neg B$: Číslo 20 není dělitelné dvěma, a současně toto číslo není dělitelné třemi. To je výrok nepravdivý (což se dalo čekat, protože negace pravdivého výroku je nepravdivá), ale jedná se o správně vytvořenou negaci původního výroku.

O principu vyloučení třetího (buď platí výrok, nebo jeho negace, a je vyloučena třetí možnost) už byla řeč. Princip vyloučení třetího je formulován ve větě 03:

(věta 03) (princip vyloučení třetího zapsaný jako výroková forma) Pro každý výrok A platí

$$A \vee \neg A.$$

Důkaz: Pomocí tabulky pravdivostních hodnot lze ukázat, že daná výroková forma má vždy pravdivostní hodnotu 1, tedy platí vždy, ať je výrok A jakýkoli. Je to tedy tautologie, výrok vždy pravdivý při jakékoli variantě pravdivosti dílčích výroků. □

V rámci cvičení lze dokázat ekvivalence některých výrokových forem, které nám pomohou při sestavování negace implikace a negace ekvivalence – podrobnější negace těchto dvou výrokových forem totiž právě využívá formy jim ekvivalentní.

(věta 04) Forma $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$.

Důkaz: Důkaz provedeme pomocí tabulky logických hodnot, stejně jako důkazy vět 1,2,3. □

(věta 04 - důsledek) Forma $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní s formou $A \wedge (\neg B)$.

Důkaz: Mohli bychom důkaz provést pomocí tabulky logických pravdivostních hodnot, ale lze také užít větu 04 a větu 02: podle věty 04 je implikace ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$, takže negace implikace musí být ekvivalentní s formou, kterou získáme z $(\neg A) \vee B$ využitím věty 02 (která říká, že negací disjunkce dílčích výroků je konjunkce jejich dílčích negací):

$$\neg(A \Rightarrow B) \stackrel{v.04}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \vee B) \stackrel{v.02}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg B. \ \square$$

Příklad 1.7. Uvažujme implikaci „Když bude pršet, vezmu si deštník." Její negace je: Bude pršet a nevezmu si deštník.

(věta 05) Forma $\neg(A \Leftrightarrow B)$ je ekvivalentní s formou

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A).$$

Důkaz: Mohli bychom provést například pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Příklad 1.8. Uvažujme ekvivalenci „Číslo n je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi.“ Negace tohoto výroku (mimochodem nepravdivá, protože původní výrok je pravdivý) je podle věty 05 celá dlouhá věta:

> (Číslo n je dělitelné šesti a současně není dělitelné dvěma i třemi) nebo (číslo n je dělitelné dvěma i třemi a současně není dělitelné šesti).

F) Univerzální výroky a existenční výroky.

Matematika se snaží o vytváření tzv. **univerzálních výroků (definice 14, část první)**, které platí pro více hodnot z jisté množiny, například pro všechna přirozená čísla, apod. Jsou to tedy jakési výroky typu „více v jednom“ nebo „nekonečno v jednom“, jinými slovy pomocí proměnných vyjádříme výrok, který platí pro více hodnot nebo nekonečně mnoho hodnot.

(definice 15) Výroková funkce je výraz, který sám není výrokem, protože není specifikováno, jaké hodnoty nabývá proměnná x, kterou obsahuje, takže není možné stanovit pravdivostní hodnotu.

Až právě kvantifikátor **(definice 16)** je ta část výroku, která vymezuje, jakých hodnot může proměnná ve výrokové funkci nabývat.

Příklad 1.9. Zde je příklad na výrokovou funkci a kvantifikátor: a) Výraz

$$x > 0$$

není výrok, protože není stanoveno, čemu se rovná proměnná x – je to ovšem výroková funkce.

b) Výraz

$$\forall x \in N : \quad x > 0$$

je pravdivý výrok, protože podmínku $x > 0$ splňují všechna přirozená čísla. Část $\forall x \in N$ je právě kvantifikátor – říká se mu obecný kvantifikátor, protože upřesňuje, že výroková funkce bude platit pro každý prvek uvedené množiny (= platí obecně pro všechny prvky dané množiny).

c) Výraz

$$\forall x \in R : \quad x > 0$$

je nepravdivý výrok, protože existují reálná čísla, pro která daná nerovnost neplatí. Mohli bychom jej pozměnit do tvaru

$$\exists x \in R : \quad x > 0,$$

který už platí. Část $\exists x \in R$ je opět kvantifikátor – říká se mu existenční kvantifikátor, a dosazením před výrokovou funkci tvrdí, že existuje aspoň jedno reálné číslo, pro které platí $x > 0$.

Symbol $\exists$ tedy znamená „existuje aspoň jeden“ (prvek z dané množiny). Výroky, které obsahují tento existenční kvantifikátor, se nazývají **existenční výroky (definice 14, část druhá)** a vyjadřují, že v dané množině se vyskytuje aspoň jeden prvek s vlastností, která je ve výroku obsažena.

G) Další symboly stručného matematického zápisu

- **označení 11**: $V(x)$ ... výroková funkce s proměnnou x;
- **označení 12**: $\forall$ ... pro každé, pro každou;
- **označení 13**: $\exists$ ... existuje; $\exists!$ ... existuje právě jedno, právě jeden; $\nexists$ ... neexistuje, neexistují;
- **označení 14**: : (dvojtečka) ... tak, že; platí
- **označení 15**: $\in$ ... patří do, je prvkem;
- **označení 16**: $\cap$ ... průnik množin;
- **označení 17**: $\cup$ ... sjednocení množin;

1.2 Cvičení

Návrh obsahu cvičení 1:

1. Výrok a jeho negace

   - Co je to výrok?
   - Negace výroků typu: aspoň tři, právě dva, nejvýše devět, označení množiny, žádný učený z nebe nespadl:

   Příklad 1.10. Negujte výroky:

   a) Číslo 19 má aspoň tři dělitele.
   b) Rovnice $x^2 - 5x + 6$ má právě dva reálné kořeny.
   c) Pravidelný šestiúhelník má nejvýše devět úhlopříček.
   d) Množina $A = \{x \in Z : |x| \leq 4\}$ má nejvýše sedm prvků.

   - Existenční a univerzální výrok, existenční a univerzální kvantifikátor.
   - Negace výroků typu $\exists$, $\forall$.

   Příklad 1.11. Negujte výrok: $\forall x \in R : \sqrt{x} \geq 0$.

Příklad 1.12. Negujte výrok: $\exists x \in R: \quad x^2 < 0$. Poznámka: Zde existují dva způsoby negace, jeden je velmi pohodlný, a sice namísto $\exists$ bude $\nexists$ a vše ostatní bude stejně. Tato negace, stejně jako negace stylem „není pravda, že ...“, je vyjádřena negativně a nás by spíše v matematice zajímalo, co bude platit pro všechny prvky množiny pozitivně, tj. preferujeme negaci způsobem[8]

$$\forall x \in R: \quad x^2 \geq 0.$$

2. Označení spojek a čtení spojek

- zopakujte označení a čtení logických spojek z přednášky;
- u implikace $A \Rightarrow B$ (jestliže A, tak B) doplň i další možná vyjádření v češtině: pokud A, (tak) B. Pro studenty je zejména matoucí, když v češtině vyjádříme obě části souvětí v opačném pořadí: B, pokud A; B (tehdy), když A; B, jestliže A.
- U ekvivalence doplň další možná čtení v češtině, kromě „právě tehdy, když“ nebo „právě když“ je to „jen tehdy, když“ nebo „jen když“.

Příklad 1.13. Označme: Z výrok „bude zima“, S výrok „bude sněžit“, D výrok „zůstanu doma“. Přeložte do české věty

a) $(Z \wedge S) \Rightarrow D$,
b) $(Z \vee S) \Rightarrow D$,
c) $\neg(D \Rightarrow Z)$.

Příklad 1.14. [9]

Označme Z výrok „dám si zmrzlinu“, C výrok „dám si čokoládu“. Vyjádřete naopak české věty symbolickým matematickým zápisem výroků:

a) Dám si zmrzlinu nebo čokoládu.
b) Nedám si zmrzlinu ani čokoládu.
c) Jestli si dám zmrzlinu, nedám si čokoládu.
d) Zmrzlinu si dám, pokud si nedám čokoládu.
e) Zmrzlinu si dám, právě když (nebo: jen když) si nedám čokoládu.

Příklad 1.15. Označme: A výrok „přijde Adam“, F výrok „přijde Filip“, K výrok „přijde Katka“. Vyjádřete následující české věty symbolickým matematickým zápisem výroků:

a) Přijde Adam, ale Filip ne.
b) Ze sourozenců Adam, Filip přijde aspoň jeden.
c) Ze sourozenců Adam, Filip přijde nejvýše jeden.
d) Z trojice A,F,K nepřijde nikdo.

[8] Tedy změníme kvantifikátor $\exists$ na $\forall$ a negujeme podmínku, která byla ve výroku uvedena za dvojtečkou.
[9] Za tento a následující příklad vděčím kolegyni Panáčové, skripta pro budoucí učitele prvního stupně.

3. Pravdivostní hodnota složeného výroku

   - Vyjdřete pravdivostní hodnotu složených výroků $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$, $B \Rightarrow A$, $\neg A \vee B$ pro všechny pravdivostní hodnoty dílčích výroků (v tabulce pravdivostních hodnot). Všimněte si, že některé tyto složené výroky jsou si navzájem logicky ekvivalentní, některé nejsou.
   - Co je to tautologie?
   - Ohodnoťte pravdivostní hodnotu složeného výroku $Z \vee (S \Rightarrow D)$ pro všechny možné pravdivostní hodnoty dílčích výroků.
   - Dokažte ekvivalenci výroku $A \Leftrightarrow B$ s výrokem $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

4. Negace složených výroků: Negujte složené výroky $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$: nejprve na příkladu, a pokuste se pak tuto negaci vyjádřit symbolickým zápisem.

   - Včera jsem šel nakoupit a také jsem byl běhat.
   - Zítra půjdu na vycházku nebo se podívám na film.
   - Když bude pršet, zůstanu doma.
   - Přirozené číslo n je dělitelné třemi právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Návrh domácího úkolu v rámci přípravy na první prověrku:

Cvičení 1.1. Dokažte věty 2,3,4,5 z přednášky 1, ale také věty 6,7 z následující přednášky 2 pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Cvičení 1.2. Negujte výroky lépe než jen dodáním záporky „není pravda, že“:

a) Každé přirozené číslo n je rovno součtu svých dělitelů.

b) Dnes bude pršet a budeme psát písemku z matematiky.

c) Žádný učený z nebe nespadl.

d) Existují aspoň tři přirozená čísla, která jsou rovna součtu všech svých dělitelů.

e) Existují nejvýše čtyři prvočísla.

f) Možná, že dnes večer půjdu do kina nebo si přečtu nějakou zajímavou knihu.

g) Existují právě dvě celá čísla, která se rovnají své druhé mocnině.

Cvičení 1.3. Zapište následující výroky symbolickým matematickým zápisem, ve kterém nepoužijete ani jedno slovo z běžné češtiny:

a) Pro každé přirozené číslo existuje přirozené číslo, které je větší než dvojnásobek toho prvního čísla zvětšený o jedničku.

b) Pro každé celé číslo existuje celé číslo, které když zmenšíme o jedničku, stále je výsledek menší než třetí mocnina toho prvního čísla.

Cvičení 1.4. Negujte následující výroky:

a) Půjdu na ten večírek právě tehdy, když tam půjde Ondra.

b) Pokud přijde Honza, řeknu mu o tom.

Cvičení 1.5. Zjednodušte symbolický zápis, aby ve výsledku nebyl symbol negace před žádnou závorkou, pouze u dílčích výrokových proměnných:

a) $\neg((A \Rightarrow B) \wedge C) \;\Leftrightarrow$

b) $\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) \;\Leftrightarrow$

c) $\neg((A \vee B) \wedge C) \;\Leftrightarrow$

Cvičení 1.6. Zapište následující výroky symbolickým matematickým zápisem, ve kterém nepoužijete ani jedno slovo z běžné češtiny:

a) Existuje přirozené číslo, které když zvětšíme o 5, výsledek bude větší než 10.

b) Přirozené číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je současně dělitelné dvěma i třemi.

Cvičení 1.7. Negujte výroky ze cvičení 1.6 (symbolicky zapsané) pouze pomocí symbolického zápisu (bez českých slov).

Cvičení 1.8. Studenti by měli umět utvořit negaci logické ekvivalence bez použití ostré disjunkce (věta 05).

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.1.

2 Důkaz implikace (přímý a nepřímý), důkaz řetězcem ekvivalencí (typ 04) a důkaz ekvivalence (typ 05)

Plán přednášky a cvičení 2: ve druhém týdnu výuky se budeme zabývat hlavně logickým zdůvodňováním výroků, na základě terminologie představené v prvním týdnu. Většina matematických výroků, které budou zdůvodňovány jako pravdivé, se týká dělitelnosti přirozených čísel.

V prvním týdnu jsme se zabývali dokazováním (zdůvodňováním typu 1, na základě tabulky pravdivostních hodnot. V tomto týdnu se budeme věnovat důkazům implikace $A \Rightarrow B$, a sice důkazu přímému (typ 02) a nepřímému (typ 03), a dvěma přístupům využívající ekvivalenci: důkazu výroku A pomocí řetězce ekvivalencí (typ 04) a rozdělení důkazu ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ na dvě implikace (typ 05).

2.1 Přednáška

Typ důkazu číslo 2: Přímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při přímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vyjdeme z toho, že platí výrok A; na základě A a dříve dokázaných matematických vět provedeme logicky korektní úsudek U_1; na základě A, U_1 a dříve dokázaných vět provedeme logicky korektní úsudek U_2; atd. až po k krocích logicky korektně usoudíme, že platí B, a to na základě platnosti A, U_1, …, U_k.

Příklad 2.1. Pro celá čísla a, b, c platí:

$$\text{a) } a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c);$$
$$\text{b) } a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b-c)$$

(tedy pokud a dělí dvě celá čísla, dělí i jejich součet, a dělí také jejich rozdíl).

DOPLNIT důkaz ... viz přednáška.

Zopakujme znění věty 04: **(věta 04)** Výrokové formy $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ jsou ekvivalentní.

<u>Důkaz:</u> pomocí tabulky pravdivostních hodnot dílčích výroků bylo provedeno v rámci cvičení 1.□

Na větě 04 je založen typ důkazu 03:

Typ důkazu číslo 3: NEpřímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při NEpřímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vlastně dokazujeme platnost logicky s ní ekvivalentní formy $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Definice 17: Forma $\neg B \Rightarrow \neg A$ se nazývá obměna implikace $A \Rightarrow B$[10]. Pozor, neplést s obrácením $B \Rightarrow A$, to totiž není logicky ekvivalentní s původní implikací.

Příklad 2.2. Pro všechna přirozená čísla a, b platí: když nelze zkrátit zlomek $\frac{a-b}{a+b}$, pak nelze zkrátit ani $\frac{a}{b}$.

DOPLNIT důkaz ... viz přednáška.

Nyní uvedeme dva typy důkazu, které souvisí s logickou ekvivalencí výroků.

Typ důkazu číslo 4: Důkaz výroku A pomocí řetězce ekvivalencí.

Výrok A vyjádříme ekvivalentně pomocí ekvivalentního úsudku U_1, ten zase pomocí ekvivalentního úsudku U_2, atd. až dojdeme k ekvivaletnímu úsudku U_k, jehož platnost je už evidentní či snadno zdůvodnitelná. A protože všechny úsudky byly vykonány s logicky stejnou vahou, je tím dokázána i platnost původního výroku A.

Příklad 2.3. Dokažte, že platí výrok A:

$$\forall a, b \in R : a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Důkaz: odečtením $2ab$ od obou stran nerovnice dostaneme ekvivalentní úsudek

U_1: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.

To lze ekvivalentně vyjádřit pomocí úsudku U_2: $(a-b)^2 \geq 0$. O pravdivosti tohoto výroku se lze snadno přesvědčit (druhá mocnina výrazu v závorce je nezáporná pro každé reálné x). A protože naše úsudky byly logicky ekvivalentní s původním výrokem A, je dokázán i on.

S důkazy či odvozováním typu 4 se setkáváme právě při ekvivalentních úpravách rovnic a nerovnic – to jsou takové úpravy, které nemění obor pravdivosti výroků, tj. množinu řešení. Rovnici či nerovnici ekvivalentně upravujeme do takového tvaru, ze kterého už lze obor pravdivosti snadno určit. □

(věta 06) Výrokové formy $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ jsou ekvivalentní.

Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot obou výrokových forem pro všechny možné kombinace pravdivostních hodnot dílčích výroků A, B byl proveden ve cvičení 1, respektive studenti tento důkaz mají na samostatné procvičení. □

Na větě 06 je založen typ důkazu 05:

[10] Obměna implikace je tedy výrok s touto implikací logicky ekvivalentní, tj. nepřímý důkaz implikace = přímý důkaz její obměny.

Typ důkazu číslo 5: důkaz ekvivalence $A \Leftrightarrow B$.

Při důkazu ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ vlastně musíme dokázat, že platí obě z implikací $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

Definice 18: Forma $B \Rightarrow A$ se nazývá obrácení implikace $A \Rightarrow B$.[11].

Příklad 2.4. Dokažte následující ekvivalenci: Pro každé přirozené číslo n platí

$$2|n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2|n.$$

Důkaz DOPLNIT ... viz přednáška. Rozdělíme na dvě implikace a každou dokážeme zvlášť. □

2.2 Cvičení

Cvičení 2.1. (na hodině) Napište Následující výroky symbolicky bez českých slov a proveďte jejich negaci:

a) Každé přirozené číslo je sudé.

b) Existuje aspoň jedno reálné číslo, pro které platí: $x^2 - 4x + 7 > 0$.

c) Pro každé přirozené číslo platí: Jestliže jeho druhá mocnina je dělitelná dvěma, tak i ono samo je dělitelné dvěma.

Cvičení 2.2. (na hodině) U výroku

$$\forall n \in N: \quad 6|n \Rightarrow 3|n$$

proveďte jeho a) obrácení, b) obměnu, c) negaci. Které z těchto čyř výroků (včetně zadaného) jsou logicky ekvivalentní?

Cvičení 2.3. (na hodině) Jestliže stále nevěříte tomu, jak se sestaví negace implikace, budete si muset dokázat větu 04 a její důsledek (věta 04 – důsledek) pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Cvičení 2.4. (na hodině) Dokažte důkazem přímým (typ 02): Jestliže s je přirozené číslo, které vznikne jako součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 (tedy $s = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$), tak s je dělitelné sedmi.

Cvičení 2.5. (na hodině) Dokažte důkazem přímým (typ 02): Jestliže je přirozené číslo liché, tak jeho druhá mocnina zmenšená o číslo 1 je dělitelná osmi.

Cvičení 2.6. (na hodině) Dokažte důkazem přímým (typ 02): Jestliže a, b jsou lichá přirozená čísla, pak rozdíl jejich druhých mocnin je dělitelný osmi.

[11] Tedy při důkazu ekvivalence musíme dokázat, že současně platí příslušná implikace i její obrácení.

Cvičení 2.7 (domácí úkol neboli HW) Dokažte důkazem přímým (typ 02): Jestliže a, b, c jsou přirozená čísla bezprostředně po sobě jdoucí a a, c jsou lichá, tak součet $(a + b + c)$ je dělitelný šesti.

Cvičení 2.8 (na hodině) Dokažte důkazem nepřímým (typ 03): Pro každé celé číslo z platí: Jestliže $7z - 8$ je sudé, tak také z je sudé.

Cvičení 2.9 (HW) Dokažte důkazem nepřímým (typ 03): Pro každé celé číslo z platí: Jestliže $(z^2 + 4)$ není dělitelné pěti, tak platí, že ani $(z - 1)$, ani $(z + 1)$ není dělitelné pěti.

Cvičení 2.10 (na hodině) Dokažte řetězcem ekvivalencí (typ 04): Pro každé reálné x platí: $x^4 + 1 \geq 2x^2$.

Cvičení 2.11 (na hodině) Dokažte důkazem typu 05: Pro každé přirozené číslo platí:

$$3|n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3|n.$$

Cvičení 2.12 (HW) Dokažte důkazem typu 05: Pro každé přirozené číslo platí (pozor, tento důkaz je chyták, logická ekvivalence neplatí – jednu implikaci snadno dokážete, ale druhou implikaci vyvrátíte protipříkladem):

$$4|n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4|n.$$

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.2.

3 Důkaz dedukcí, indukcí, sporem, protipříkladem a konstrukcí

Plán třetího týdne:

Typ důkazu 06: Důkaz univerzálního výroku (např. $\forall n \in N: \ V(n)$) **deduktivním rozborem** dílčích případů.

Typ důkazu 07: Důkaz univerzálního výroku (např. $\forall n \in N: \ V(n)$) **úplnou matematickou indukcí**.

Typ důkazu 08: Důkaz výroku A **sporem**.

Typ důkazu 09: Vyvrácení univerzálního výroku ($\forall n \in N: \ V(n)$) **protipříkladem**.

Typ důkazu 10: Důkaz **existenčního výroku** (např. $\exists n \in N: \ V(n)$) nalezením příkladu či konstrukcí.

3.1 Přednáška

V typech důkazů 06 a 07 se budeme zabývat zdůvodněním univerzálního výroku, tj. platností výroky pro všechny objekty dané množiny objektů, zpravidla (ikdyž ne vždy) pro všechna čísla z nějaké číselné množiny.

Typ důkazu číslo 6: Deduktivní důkaz pomocí rozdělení na dílčí případy.

Objekty (čísla) zpravidla rozdělíme do několika skupin a výrok dokážeme pro danou skupinu zvlášť, s využitím dalšího faktu, který pro tuto skupinu objektů platí..

Označení 18: $|$ ... dělí beze zbytku = je dělitelem. Například $2|6$ (dvojka dělí šestku), $2|8$ (dvojka dělí osmičku), $3|21$ (číslo 3 je dělitelem čísla 21).

Příklad 3.1. Dokažte, že

$$\forall n \in N: \quad 9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$$

(slovně: dokažte, že číslo 9 je dělitelem výrazu v závorce, kde n je libovolné přirozené číslo)

Důkaz: provedeme typem 06, tedy rozdělením na tři různé situace podle toho, zda číslo n je dělitelné třemi ($n = 3k$), zbytek po dělení čísla n třemi je roven jedné ($n = 3k + 1$) nebo zbytek po dělení čísla n třemi je roven dvěma ($n = 3k + 2$):

$n = 3k$: Dosadíme do zkoumaného výrazu v našem výroku a dostaneme:

$$(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) = \text{ zbytek viz přednáška...}$$

$n = 3k + 1$: Dosadíme do zkoumaného výrazu v našem výroku a dostaneme:

$$(n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3) = \text{ zbytek viz přednáška...}$$

$n = 3k + 2$: Dosadíme do zkoumaného výrazu v našem výroku a dostaneme:

$$(n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3) = \text{ zbytek viz přednáška...}$$

Příklad 3.2. Prozkoumejte deduktivně, čemu se rovná součet $1+2+3+\cdots+n$ prvních n přirozených čísel.

Typ důkazu číslo 7: Důkaz matematickou indukcí.

Při matematické indukci dokazujeme tzv. univerzální výrok, který platí většinou pro všechna přirozená čísla, která jsou větší nebo rovna přirozenému číslu n_0, tj. výroky typu

$$\forall n \geq n_0 : V(n).$$

Platnost tohoto univerzálního výroku dokazujeme ve dvou krocích:

a) Dokážeme platnost výroku $V(n_0)$.

b) Dokážeme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

Pokud platí obě tyto věci, „dosáhne“ platnost $V(n)$ na jakékoli přirozené číslo n.

Definice 19: Indukční předpoklad se nazývá předpoklad $V(n)$ v implikaci

$$V(n) \Rightarrow V(n+1)$$

v podmínce (b), kterou dokazujeme při indukci.

Poznámka: důkaz indukcí vyplývá ze struktury množiny N:

ad a) jednička je nejmenší přirozené číslo;

ad b) každé další přirozené číslo různé od jedničky získáme zvýšením předchozího přirozeného čísla o jedničku.

Tedy nekonečným opakováním kromu (b) projdeme všechna přirozená čísla – viz [2], str. 121: „pravdivost tohoto výroku se dědí od čísla k číslu“. My ovšem při důkazu tohoto tzv. indukčního kroku = části (b) projdeme tento proces jen jednou – dokážeme, že jakékoli přirozené číslo větší než n_0 danou vlastnost „dědí“ od čísla o jedničku menšího.

Ad příklad 3.1: dokažme výrok z příkladu 3.1 úplnou matematickou indukcí:

$$\forall n \in N : \quad 9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3).$$

Důkaz: důkaz úplnou matemat. indukcí spočívá ve dvou krocích:

krok a) Ukažme, že rovnost platí pro $n_0 = 1$:

$$9|(1 + 2^3 + 3^3) = 27 \ldots \text{ to platí.}$$

krok b) Dokažme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, která má v našem případě tvar

$$\underbrace{9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)}_{V(n)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{9|((n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3)}_{V(n+1)}.$$

Předpokládejme, že platí indukční předpoklad $V(n)$, tedy číslo $(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)$ je dělitelné devíti.

Úsudek U_1: Vyjádřeme si náš předpoklad pomocí definice dělitelnosti[12]: existuje nějaké přirozené číslo k, že

$$(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) = 9k.$$

Úsudek U_2: Upravujme číslo $((n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3)$ a snažme se jej vyjádřit jako násobek čísla 9 – pokud se nám to podaří, budeme vědět, že je dělitelné devíti a důkaz bude u konce. Tak tedy:

$$((n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3) = \underbrace{(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3}_{k} + 3n^2 \cdot 3 + 3n \cdot 9 + 27 = 9 \cdot (k + n^2 + 3n + 3).$$

Použili jsme pouze vzorec $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ a označení čísla k z rovnosti předpokladu. Jsme hotovi – skutečně se dalo číslo 9 vytknout z celého výrazu, tj. $(n+1)$-ní člen posloupnosti zadané naším vzorcem „zdědí“ dělitelnost devíti od členu předchozího. Protože jsme v předpokladu vyšli od libovolného přirozeného n, platí tato vlastnost pro všechna přirozená čísla. $\square$

Ad příklad 3.2. Dokažte úplnou matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí rovnice

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Zdůvodnění (= důkaz):

i) $n = 1$ dosadíme do obou stran rovnosti: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ... platí;
$n = 2$ dosadíme do obou stran: $1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$ ... platí.

ii) Předpokládáme platnost indukčního předpokladu: Vzorec platí pro n, tj.

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

A odtud nyní dokážeme platnost vztahu (= chceme dokázat) pro $(n+1)$:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

[12] Kterou jsme sice ještě neprobrali, ale řekněme si ji za čtrnáct dní a intuitivně ze střední školy chápeme, o co se jedná

Zkusme upravit levou stranu dokazované rovnosti s využitím pravé strany indukčního předpokladu (a poté převedeme na společného jmenovatele a vytkneme člen $(n+1)$ v čitateli):

$$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) \stackrel{ind.p.}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

A to jsme chtěli dokázat, důkaz je hotov. S využitím platnosti vztahu pro n jsme jej dokázali pro $(n+1)$.

Dalším velmi častým typem dokazování a zdůvodňování výroků v matematice je důkaz sporem:

Typ důkazu číslo 8: Důkaz sporem.

Předpokládáme platnost negace daného tvrzení a logicky správně z této negace odvozujeme další úsudky, dokud nedojdeme k nesmyslu, který neplatí. Protože jsme pracovali logicky naprosto správně, tak kořen rozporu je ve startovacím předpokladu – nyní víme, že předpoklad $\neg A$ neplatí, a tedy platí výrok A.

Příklad 3.3. Dokažte, že $\log_2 3$ není racionální číslo.

Důkaz: budeme předpokládat negaci zadaného výroku, tj. že $\log_2 3$ je racionální číslo, tj. lze tuto hodnotu vyjádřit zlomkem:

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

pro $m \in Z$ a $n \in N$. Nyní budeme vyvozovat nějaké důsledky a úsudky a využijeme přitom definice logaritmu, tj. faktu F_1: Pro $\log_2 x = y$ platí $2^y = x$.

Úsudek U_1: Z rovnosti, jejíž platnost předpokládáme, a faktu F_1 plyne

$$2^{\frac{m}{n}} = 3.$$

Umocněme tento vztah na n-tou, abychom se zbavili zlomku v mocnině:

$$2^m = 3^n,$$

a na obou stranách této rovnosti se přitom vyskytují přirozená čísla.

Úsudek U_2: Protože číslo 2 je dělitelem čísla 2^m a platí $2^m = 3^n$, musí být číslo 2 také dělitelem čísla 3^n – ale to je spor se známým faktem, že číslo 2 není dělitelem žádného lichého čísla (a číslo 3^n jako násobek n lichých čísel je liché).

Naprosto korektními úvahami jsme přišli k nesmyslu, tj. nesprávný byl náš výchozí předpoklad – a tedy platí jeho negace, neboli skutečnost, že $\log_2 3$ není racionální číslo. $\square$

Typ důkazu číslo 09: Vyvrácení univerzálního výroku (tedy výroku typu: $\forall x \in M: \ V(x)$) protipříkladem.

Tvrzení, že něco existuje či platí v každém případě (např. pro všechna přirozená čísla) jednoduše vyvrátíme tím, že sestavíme aspoň jeden protipříklad, kdy daná skutečnost neplatí (např. najdeme jedno přirozené číslo, které zadanou vlastnost nesplňuje).

Příklad 3.4. Vyvraťte následující tvrzení pomocí protipříkladu: Každé přirozené číslo $n > 1$ lze „zaplatit“ sumou pouze dvoukorunových a pětikorunových mincí předaných v jisté obálce nebo kontejneru.

Řešení je jednoduché – kromě jedničky existuje ještě jedno přirozené číslo, které nelze vyčíslit sečítáním kladných násobků dvojky a pětky – najdete ho?

Úpravou dostaneme pravdivé tvrzení, které lze dokázat deduktivně, rozdělením na dva případy: Každé přirozené číslo $n > 3$ lze „zaplatit“ sumou pouze dvoukorunových a pětikorunových mincí předaných v jisté obálce nebo kontejneru.

Typ důkazu číslo 10: Důkaz existenčního výroku (tedy výroku typu $\exists x_0 \in M: $ neplatí $V(x_0)$) nalezením-sestrojením příkladu.

Skutečnost, že jistá struktura existuje, zdůvodníme prostě tak, že ji nalezneme či sestrojíme (popíšeme její konstrukci).

Příklad 3.5. Dokažte následující existenční výroky pomocí obrázku:

a) Čtyři rovnostranné trojúhelníky lze sestavit pomocí 12 zápalek stejné délky.

b) Čtyři rovnostranné trojúhelníky lze sestavit pomocí 9 zápalek stejné délky.

c) Čtyři rovnostranné trojúhelníky lze sestavit pomocí 6 zápalek stejné délky.

3.2 Cvičení

Cvičení 3.1. (na hodině) Uvažujme výrok

$$\forall n \in N: \quad 3|(n^3 + 2n).$$

Dokažte jej

a) deduktivním rozdělením na dílčí případy;

b) úplnou matematickou indukcí.

Cvičení 3.2. (HW) Uvažujme výrok

$$\forall n \in N: \quad 7|(2^{3n+1} + 5).$$

Dokažte jej a) deduktivním rozdělením na dílčí případy; b) úplnou matematickou indukcí.

Cvičení 3.3. (HW) Uvažujme výrok

$$\forall n \in N: \quad 4|(n^4 - n^2).$$

Dokažte jej a) deduktivním rozdělením na dílčí případy; b) úplnou matematickou indukcí.

Cvičení 3.4. Dokažte indukcí:

a) (na hodině) $\forall n \in N: \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) (HW) $\forall n \in N: \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

Cvičení 3.5. (na hodině) Dokažte sporem, že $\sqrt{3}$ není racionální číslo.

Cvičení 3.6. (na hodině) Dokažte sporem, že $\forall n \in N: \ 2|n^2 \ \Rightarrow \ 2|n$.

Cvičení 3.7. (na hodině) Vyvraťte následující univerzální výroky:

a) $\forall n \in N: \ 4|n^2 \ \Rightarrow \ 4|n$

b) $\forall a, b \in N: \ 6|a \cdot b \ \Rightarrow \ 6|a \vee 6|b$.

Cvičení 3.8. (na hodině) Dokažte nebo vyvraťte: $\forall n \in N: \ 6|n^2 \ \Rightarrow \ 6|n$.

Cvičení 3.8. (na hodině, ale možná se stihne až ve čtvrtém cvičení) Dokažte následující existenční výroky:

a) $\exists a, b \in R: \ (a+b)^2 = a^2 + b^2$;

b) $\exists$ řešení rovnice $x^5 + 2x - 5 = 0$ na intervalu $\langle 1; 2 \rangle$.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.3.

4 Operace s množinami, důkaz užitím Vennových diagramů, kartézský součin

Warm-up: Po tématu logiky v týdnech 1-3 se budeme v týdnech 4-5 zabývat druhým základním pilířem matematiky, a sice číselnými množinami. To je téma studentům známé, proto jen něco málo o operacích s množinami v této kapitole a o dělitelnosti zejména přirozených a celých čísel v kapitole následující.

Návrh plánu přednášky:

- Operace $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$: definice jednak Vennovými diagramy, jednak logickým symbolickým zápisem.
- Některé vlastnosti těchto operací: de Morganova pravidla, distributivní zákon sjednocení a průniku množin ... dokazujeme nejlépe Vennovými diagramy, typ důkazu č. 11.
- Typ 12 důkazu rovnosti množin: Pomocí univerzálního prvku a řetězce ekvivalencí.
- Typ 13 důkazu rovnosti množin: Pomocí univerzálního prvku a dvou inkluzí.
- Operace $\setminus$, $\div$ $\times$ ... definice Vennovými diagramy, kartézským grafem, a symbolickým logickým zápisem.
- $\times$ ... vlastně se nejedná o operaci, protože výsledkem je struktura jiného charakteru, s jinými objekty jako prvky (prvky kartézského součinu množin jsou tzv. uspořádané dvojice).
- Prozkoumejte některé vlastnosti operací $\setminus$, $\div$: asociativitu operace $\div$, vztah $(A \setminus B) \cap C = \ldots$, vztah $(A \setminus B) \div C = \ldots$.
- Obrázek tří množin v obecné poloze, obrázek čtyř množin v obecné poloze – u čtyř množin dělicí křivky rozdělí rovinu na šestnáct oblastí u tří množin na osm oblastí (pravděpodobně jen obrázek, příklady se stihnou na cvičení).

4.1 Přednáška

V kapitole 4 se budeme zabývat pěti druhy množinových operací, a sice sjednocením, průnikem, rozdílem, doplňkem a symetrickým rozdílem. Šestým typem „operace“ je kartézský součin množin[13], ale jedná se o postup trochu jiné kategorie, protože výsledkem kartézského součinu je množina prvků jiného typu než jsou prvky sjednocení, průniku, doplňku, rozdílu či symetrického rozdílu.

Množinou M (**definice 20**) rozumíme soubor navzájem rozlišitelných[14] prvků, o kterých lze jednoznačně rozhodnout, že do něj patří.

[13] Pojem operace bude přesně definován v definice 54 kapitoly 6, ale kartézský součin vytváří množiny objektů jiného typu, než jsou vstupní množiny, a proto kartézský součin množin není považován za binární operaci (jako jsou sjednocení, průnik, rozdíl, symetrická diference) nebo unární operaci (jako je doplněk množiny).

[14] Tj. jeden objekt nemůže být dvakrát prvkem téže množiny: $\{6, 6\} = \{6\}$.

Prvky množiny budeme vypisovat do složených závorek:

- **označení 19**: Levá závorka { a pravá závorka } označují množinu.

Například $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu přirozených čísel, čísla 1, 2, 3 jsou prvky množiny N.

A) Zadávání množiny.

Množiny lze zadávat buď výčtem prvků jako v předchozím příkladě, nebo charakteristickou vlastností, jež splňují její prvky.

Příklad 4.1. Zadání množiny charakteristickou vlastností:

$$A = \{x \in R : 0 \leq x \leq 2\}$$

(čteme: A je množina takových reálných čísel x, že $0 \leq x \leq 2$)[15] – charakteristická vlastnost množiny následuje v tomto zápisu za dvojtečkou.

Jiný příklad: $N_7 = \{7, 14, 21, 28, \ldots\}$ je množina násobků přirozeného čísla 7, „téměř“ výčtem všech prvků, protože prvků je nekonečně mnoho.

Jiný příklad: $D_{28} = \{d \in N : \; d|28\}$ je zadání množiny charakteristickou vlastností, $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ je pak zadání téže množiny výčtem prvků.

B) Základní množinová označení a definice

Označení operací průniku a sjednocení čtenář zná (označ. 16 a 17 na str. 13) – v následující definici připomeneme definici disjunktních množin, univerzální množiny a doplňku množiny:

Množiny A, B se nazývají disjunktní (**definice 21**), když jejich průnikem je prázdná množina ($A \cap B = \emptyset$).

Univerzální množina[16] (**definice 22a**) je taková množina, která obsahuje všechny prvky, které má smysl uvažovat. Doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině (**definice 22b**) je množina těch prvků univerzální množiny, které neleží v množině A.

Příklad 4.2. Pokud $U = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je univerzální množina a

$$A = \{\ldots, -2, -1 - 0, 1, 2\},$$

tak doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině U je množina

$$\overline{A} = \{3, 4, 5, \ldots\}.$$

[15] Všimněte si, že dvojtečku nyní čteme „takových, že“ nebo „tak, že“.

[16] Česky: všeobecná, všeobsahující.

Sjednocení množin A, B (**definice 23a**) je množina $A \cup B$ takových prvků, které jsou prvky množiny A nebo B (nebo ve významu nevylučovacím). Průnik množin A, B (**definice 23b**) je množina $A \cap B$ takových prvků, které jsou prvky množiny A a současně prvky množiny B.

Označení průniku a sjednocení ... viz označení 16 a 17 v kapitole první. Další označení, která čtenář musí zvládnout, jsou tedy tato:

- **označení 20**: $\overline{A}$ ... doplněk množiny A (vzhledem k univerzální množině U);
- **označení 21**: „:=“ ... definiční, přiřazovací rovnítko, které znamená „se definuje jako ...“; například lze definovat doplněk množiny A takto:

  $$\overline{A} := \{x \in U : x \notin A\}$$

  (čteme: doplněk množiny A se definuje jako množina (či označuje množinu) těch prvků x z množiny U, které nepatří do A)
- **označení 22**: $\emptyset$ ... prázdná množina;
- **označení 23**: $\subseteq$ ... je podmnožinou;
- **označení 24**: $\subset$ ... je vlastní podmnožinou, tj. je podmnožinou, ale nerovná se dané množině; v matematických symbolech $A \subset B$ tehdy, když

  $$A \subseteq B \quad \wedge \quad A \neq B.$$

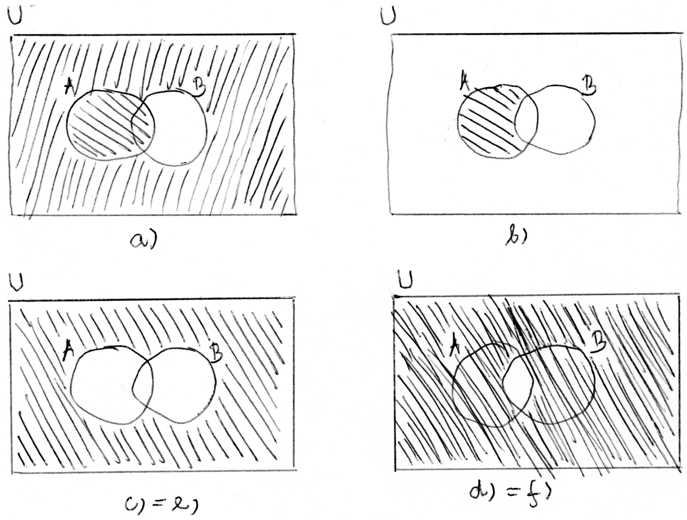
C) Vennovy diagramy a důkazy rovnosti množin.

Vennovy diagramy (**definice 24**) jsou diagramy, které schematicky reprezentují množiny pomocí části roviny – část roviny označená jako M reprezentuje všechny prvky množiny M.

DOPLNIT ... předchozí operace sjednocení, průniku a doplňku lze dobře definovat pomocí Vennových diagramů graficky.

Příklad 4.3. Na obrázku vidíte Vennovy diagramy následujících množin[17]: a) $A \cup \overline{B}$, b) $A \cap \overline{B}$, c) $\overline{A} \cap \overline{B}$, d) $\overline{A} \cup \overline{B}$, e) $\overline{A \cup B}$, f) $\overline{A \cap B}$.

[17] Tento příklad viz [4], str. 795. Většina této kapitoly je zpracována podle [4], str. 791-800.



Typ důkazu číslo 11: Rovnost množin Vennovými diagramy.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují množiny a operace mezi nimi, lze dokázat pomocí Vennových diagramů – sestavíme Vennův diagram pro každou stranu rovnosti a vyšrafujeme v něm části odpovídající výsledkům daných operací; pokud pak v obou Vennových diagramech jsou vyšrafovány stejné části roviny, tvrzení o rovnosti je tím dokázáno.

(Věta 08) Pro libovolné tři množiny platí tzv. asociativní zákony vzhledem k operacím průniku a sjednocení:

$$\text{a)}\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad \text{b)}\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Důkaz (typ 8) nakreslíme Vennův diagram pro každou ze stran rovnosti a porovnáme šrafované oblasti – zjistíme, že se rovnají, tj. schematický (či grafický) důkaz je hotov (vyučující na tabuli). □

Dále platí velmi zajímavé rovnosti množin, které souvisí také s operací doplňku množiny vzhledem k univerzální množině (= s definicí 22):

(věta 09) De Morganovo pravidlo (a): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů – viz cvičení. □

(věta 10) De Morganovo pravidlo (b): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů – viz cvičení. □

Typ důkazu číslo 12: Rovnost množin pomocí univerzálního prvku a řetězce ekvivalencí.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují množiny a operace mezi nimi, lze dokázat pomocí tzv. univerzálního prvku, což je libovolný prvek x množiny uvažované na levé straně rovnosti – předpokládáme, že x je prvkem množiny na levé straně rovnosti a pomocí řetězce ekvivalencí dospějeme k tomu, že x je též prvkem množiny na pravé straně rovnosti.

Ad důkaz věty 10: zdůvodnění lze provést i pomocí univerzálního prvku a řetězce ekvivalencí ... DOPLNIT, viz přednáška.

Typ důkazu číslo 13: Rovnost množin pomocí univerzálního prvku a dvou inkluzí.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují množiny a operace mezi nimi, lze dokázat pomocí tzv. univerzálního prvku, což je libovolný prvek x.

a) předpokládáme, že x je prvkem množiny na levé straně rovnosti a pomocí řetězce implikací dojdeme k úsudku, že x je též prvkem množiny na pravé straně rovnosti.

b) předpokládáme, že x je prvkem množiny na pravé straně rovnosti a pomocí řetězce implikací dojdeme k úsudku, že x je též prvkem množiny na levé straně rovnosti.

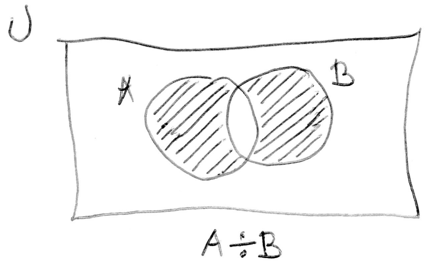
Ad důkaz věty 10: zdůvodnění lze provést i tak, že pomocí univerzálního prvku dokážeme dvě inkluze ... DOPLNIT, viz přednáška.

D) Operace rozdílu množin a symetrického rozdílu množin.

- (**označení 25**) rozdíl množin A a B (a současně (**definice 25**)) budeme označovat sešikmeným znaménkem minus, aby bylo patrno, že se jedná o jinou operaci než odčítání reálných čísel:
$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\};$$
Doporučuji psát raději obyčejné MINUS, protože při použití lomítka záleží na tom, zda je otočeno ve tvaru dělení nebo není: množinové $\setminus$ je něco naprosto jiného než množinové dělení $/$, které bude představeno v kapitole 7. Nebude tedy chybou, když budeme psát $A - B := \{x \in A : x \notin B\}$, aby se minus lépe odlišilo od lomítka v opačném směru.

- (**označení 26**) Symetrický rozdíl množin A a B (a současně (**definice 26**)) budeme označovat jako $A \div B$, tj.
$$A \div B := \{x \in U : x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)\}.$$

(z obrázku Vennova diagramu 1 je patrný výsledek této operace použité na množiny A, B).



Obrázek 1: Výsledek operace symetrického rozdílu množin A, B.

E) Kartézský součin množin

Pojem kartézského součinu je v jistém smyslu odlišný od dosud uvažované unární operace doplňku množiny (unární operace = taková operace, do které vstupuje jedna množina A) a binárních množinových operací průniku, sjednocení, rozdílu nebo symetrického rozdílu (binární operace je taková operace, do které vstupují dvě množiny A, B) – zatímco výsledkem všech předchozích operací je zase nějaká podmnožina univerzální množiny, výsledkem kartézského součinu je množina jiné kategorie: množina uspořádaných dvojic.

- (**označení 27**) Kartézský součin množin A, B (a současně (**definice 27**)) budeme označovat jako $A \times B$, tj. zkrácené symbolické vymezení kartézského součinu je dáno vztahem
$$A \times B := \{[a; b] : a \in A \wedge b \in B\}$$
(právě uvedený symbolický zápis čteme: Kartézský součin množin A a B je množina (všech možných) uspořádaných dvojic typu $[a; b]$, kde a je prvkem množiny A a b je prvkem množiny B).

Grafickou reprezentací kartézského součinu je tzv. kartézský graf ... DOPLNIT.

Příklad 4.4. Pro $A = \{a, b\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$ lze sestavit jejich kartézský součin, který má šest prvků (= šest uspořádaných dvojic):
$$A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3]\}$$
(tedy vidíme, že u konečných množin je dán počet prvků jejich kartézského součinu součinem počtů prvků jednotlivých množin). Pozor, záleží na pořadí, protože $A \times B \neq B \times A$. Speciálně
$$B \times A = \{[1, a], [1, b], [2, a], [2, b], [3, a], [3, b]\}.$$
V uspořádaných dvojicích v hranatých závorkách tedy záleží na pořadí jednotlivých prvků.

Příklad 4.5. RxR označuje tzv. kartézský čtverec množiny reálných čísel. Pomocí RxR a dvou navzájem kolmých reálných os lze popsat množinu všech bodů v rovině: kartézská soustava souřadnic je taková soustava, jejíž dvě osy jsou na sebe kolmé a jednotka na obou osách je stejně velká. Přitom např. bod $[1; 2]$ leží v takto popsané rovině jinde než bod $[2; 1]$ – záleží na pořadí prvků v dané uspořádané dvojici.

Tedy pojem kartézského součinu nám umožňuje popsat množiny bodů v rovině pomocí jejich souřadnic – jedná se proto o základní pojem analytické geometrie, kdy geometrické útvary popisujeme pomocí čísel, funkcí a rovnic. Za svůj název vděčí kartézská soustava souřadnic člověku, který se jmenoval René Descartes (1596-1650) – je považován za zakladatele moderní filosofie, a také svým trváním na souřadnicovém popisu geometrických objektů významně přispěl k rychlému rozvoji moderní geometrie.

4.2 Cvičení

Cvičení 4.1. K tabuli půjdou tři lidi současně: nakreslete Vennův diagram a napište zadání operace charakteristickou vlastností a) u operace sjednocení množin, b) u operace průniku množin, c) u operace doplňku množiny.

Cvičení 4.2. Vidíte souvislost mezi teorií množin (větami 9 a 10) a logikou? Jaké tři různé spojitosti s logikou na větách 9 a 10 vidíte?

Cvičení 4.3. K tabuli půjdou tři lidi současně: a) u operace rozdílu množin nakreslete Vennův diagram a napište zadání operace charakteristickou vlastností, b) u operace symetrického rozdílu množin nakreslete Vennův diagram a napište zadání operace charakteristickou vlastností, c) u kartézského součinu množin nakreslete kartézský diagram a zapište zadání tohoto kartézského součinu charakteristickou vlastností.

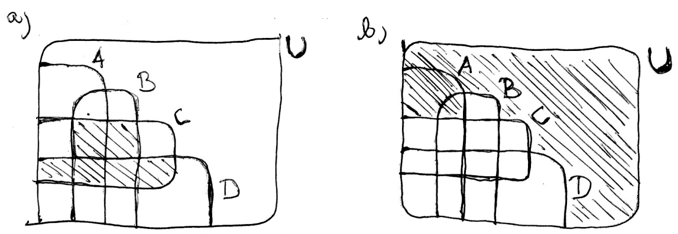
Cvičení 4.4. Pomocí Vennových diagramů dokažte asociativitu operace symetrický rozdíl, tedy že pro množiny A, B, C platí

$$(A \div B) \div C = A \div (B \div C).$$

Cvičení 4.5. Pomocí Vennových diagramů dokažte, že pro množiny A, B, C platí

$$A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C).$$

Cvičení 4.6. Na obrázcích jsou čtyři množiny A, B, C, D (Vennovy diagramy pro čtyři množiny v obecné poloze); zapište pomocí těchto množin a množinových operací množinu, která je dána šrafováním na obrázku:



Cvičení 4.7. (HW) Prozkoumejte[18] operaci symetrického rozdílu a pomocí Vennových diagramů dokažte, že platí

[18]Viz [17], str.44, př 1.2.B6.

a) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

b) $A \div B = B \div A$,

c) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$,

d) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

Cvičení 4.8. (HW) Dokažte, že pro množiny A, B platí $A \cup B = A \div (B \div (A \cap B))$. Důkaz proveďte 11) pomocí Vennových diagramů, 13) pomocí univerzálního prvku a dvou inkluzí, 12) pomocí univerzálního prvku a řetězce ekvivalencí.

Cvičení 4.9. (HW) Vyjádřete matematickým symbolickým (logickým) zápisem bez jakékohokoli českého slova definice všech operací, které jsme v této kapitole prošli:

a) $\overline{A} := \ldots$

b) $A \setminus B := \ldots$

c) $A \times B := \ldots$

d) $A \cup B := \ldots$

e) $A \cap B := \ldots$

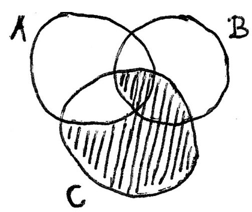
f) $A \div B := \ldots$

Cvičení 4.10. (HW) Na univerzální množině U všech přirozených čísel jsou zadány množiny $A = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$, $B = \{3, 5, 10, 12, 15\}$, $C = \{3, 10, 17, 18, 19\}$. Udejte výčtem prvků množinu $(\overline{A \cup B}) \cap C$.

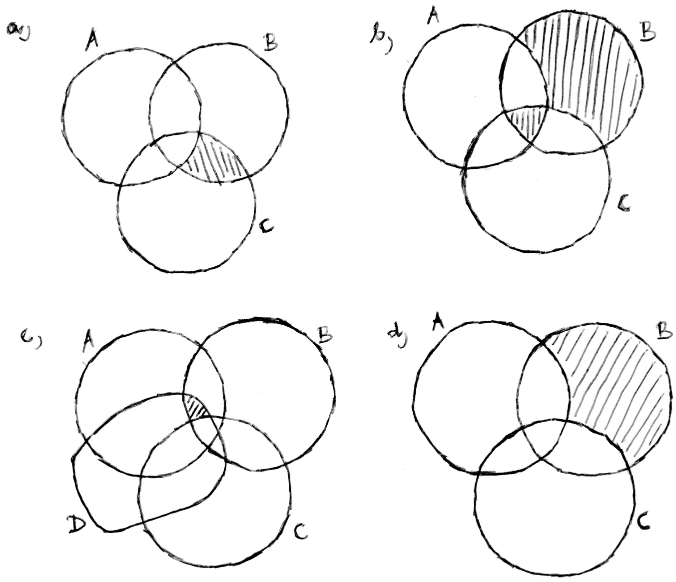
Cvičení 4.11. (HW)

a) Uveďte definici množiny: Množina je ...

b) Vyjádřete šrafovanou část S Vennova diagramu na obrázku pomocí množin na obrázku a známých množinových operací: $S = \ldots$



Cvičení 4.12. (HW) Napište množinové výrazy, jejichž výsledkem je vyšrafovaná plocha Vennova diagramu na obrázku:



Cvičení 4.13. (HW) Pomocí Vennových diagramů vyřešte: 120 studentů skládalo tři zkoušky. Přitom deset procent studentů nesložilo ani jednu z nich. Nebyl nikdo, kdo by složil zkoušku jen z druhého předmětu. Devět studentů z něj složilo úspěšně zkoušku, leč pro změnu neprospělo z prvního předmětu. 47 studentů složilo ze tří zkoušek dvě. 33 studentů nevyhovělo z třetího předmětu. 56 studentů složilo úspěšně zkoušku ze druhého i třetího předmětu, zato však 20 studentů neobstálo ani u jednoho z nich. Kolik studentů složilo pouze třetí zkoušku?

Cvičení 4.14. (HW) Cvičení k pojmu kartézský součin: Viz

`http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=1466,`

a sice: **příklady** (zadání), až pak **lekce** (zadání i s výsledky a poznámkami).

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.4.

5 Dělitelnost celých čísel, základní charakteristika racionálního čísla

Warm-up: Obsah páté přednášky i cvičení bude přednesen na páté přednášce, takže je vcelku součástí prověrky v šestém týdnu, i když páté cvičení se už neodehraje.

5.1 Přednáška

Příklad 5.1. (nebo spíše otázka) Řekněte sousedovi v lavici odpovědi na následujících pět otázek:

1. Proč existuje N?
2. Proč existuje Z, nestačilo by N?
3. Proč existuje Q, nestačilo by Z?
4. Proč existuje R, nestačilo by Q?
5. Proč existuje C, nestačilo by R?

A) O dělitelnosti celých čísel

Definice 28: Celé číslo a beze zbytku dělí neboli je dělitelem celého čísla b, když existuje celé číslo q tak, že platí $b = a \cdot q$. Pokud číslo $q \in Z$ s touto vlastností neexistuje, říkáme, že a nedělí (není dělitelem čísla) b.

Studenti pozor, dělitelnost známou ze střední školy jsme trochu rozšířili i na záporné dělitele, a tím se počet dělitelů každého celého čísla zdvojnásobil – kromě kladného znaménka existují i dělitelé se stejnou absolutní hodnotou, jen se jedná o záporná čísla.

Definice 29: Každé celé číslo b má vždy následující čtyři dělitele: 1, -1, b, $-b$ ... tito dělitelé se nazývají nevlastní dělitelé čísla b. Všichni ostatní dělitelé (pokud nějací existují) se nazývají vlastní dělitelé čísla b. S tím souvisí další pojem – **definice 30** – celé číslo p se nazývá prvočíslo, pokud má pouze nevlastní dělitele; pokud má i vlastní dělitele, nazývá se složené číslo.

- (**označení 29**) Největší společný dělitel celých čísel a, b se označuje jako $NSD(a, b)$. Například $NSD(24, 30) = 6$.
- Násobek dvou přirozených čísel a, b je takové přirozené číslo c, že $a|c$ a současně $b|c$. (**označení 30**) Nejmenší společný násobek[19] přirozených čísel a, b se označuje $nsn(a, b)$ a definuje se jako nejmenší přirozené číslo, které je násobkem obou z čísel a, b. Například $nsn(24, 30) = 120$.

[19]Tedy u záporných celých čísel nebudeme machrovat a hledat nejmenší společný násobek, protože ten neexistuje. Má smysl definovat a hledat jen nejmenší společný násobek přirozených čísel.

V následující větě rozšíříme představu o dělení dvou kladných čísel, kde výsledkem je neúplný podíl a zbytek, na poněkud bizarní kombinaci dělení dvou celých čísel, kdy podíl může být záporný. Za této situace vylučujeme dělení nulou (rozdělení jakékoli hodnoty na nula částí nemá smysl) a případné záporné znaménko převedeme do čitatele, tj. stačí se omezit na dělení celého čísla b přirozeným číslem a:

(Věta 11) - věta o zbytku vždy nezáporném

Pro čísla $a \in N$, $b \in Z$ existuje dvojice celých čísel q, r takových, že $0 \leq r < a$, a platí

$$b = a \cdot q + r.$$

Důkaz typu 10 (konstrukční):

(a) Pro $b = 0$ platí: $0 = a \cdot 0 + 0$, tj. hledaná čísla jsou $q = 0$, $r = 0$.

(b) Pro $b > 0$: Sečítáme číslo a nulakrát, jedenkrát, dvakrát, atd. ... až q-krát, abychom dostali takové číslo, že dalším přičtením kladného čísla a už dostaneme číslo větší než b (protože číslo b je konečné, po konečném počtu sečtení čísla a se nám to musí podařit). Číslo q je pak podílem po dělení $b : a$ a číslo $r := b - aq$ je zbytkem po tomto dělení. Z konstrukce plyne, že zbytek r je kladný.

(c) Pro $b < 0$: Odečítáme číslo a od nuly jedenkrát, dvakrát, atd. ... až g-krát, abychom dostali největší možné číslo, které je menší nebo rovno číslu b (protože číslo b je konečné, po konečném počtu odečtení kldného čísla a se nám to musí podařit). Číslo $q := -g$ je pak podílem po dělení $b : a$ a číslo $r := b - aq$ je zbytkem po tomto dělení. Z konstrukce plyne, že číslo aq je číslem totožným s b, nebo nejbližším záporným násobkem čísla a, jehož obraz na číselné ose leží nalevo od obrazu čísla b. Z této konstrukce plyne, že zbytek r je kladný.

Příklad 5.2. (studenti sami, vyučující provede kontrolu) Nalezněte čísla q, r z věty 11 při

a) dělení čísla $b = 25$ číslem $a = 3$;

b) dělení čísla $b = (-25)$ číslem $a = 3$;

Důvod hledání **vždy kladného** zbytku r jsou zbytkové třídy – viz 7 – pro ně budeme potřebovat rozdělení všech celých čísel na podmnožiny podle kladného zbytku při dělení přirozeným číslem. Je tedy pro nás důležitý fakt, že tento kladný zbytek vždy existuje. Při dělení záporného čísla b přirozeným číslem a při tomto přístupu tedy nehledáme číslo nejblíže menší než absolutní hodnota $|b|$, které je dělitelné číslem a, ale číslo nejblíže větší než $|b|$, které je dělitelné číslem a – tj. hledáme číslo nejblíže vlevo od obrazu čísla b na reálné ose, které je dělitelné číslem a, a pak jeho (nezáporná) vzdálenost od čísla b je rovna zbytku r. Více viz kapitola 7.

Věta 12. Pro celá čísla a, b, c platí:

a) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b + c)$;

b) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b - c)$

(tedy pokud a dělí dvě celá čísla, dělí i jejich součet, a dělí také jejich rozdíl).

Důkaz: Byla dokázána na přednášce 2, studenti musejí její důkaz znát v rámci přímého důkazu implikace (důkazu typu 2).

Protože[20] $NSD(0;0)$ neexistuje, $NSD(0;b) = |b|$ pro nenulové $b \in Z$ a $NSD(a;b) = NSD(|a|;|b|)$ pro $a \neq 0 \neq b$, stačí hledat největšího společného dělitele dvou přirozených čísel a, b. Z toho důvodu je následující věta vyslovena a dokázána pouze pro přirozená čísla.

Věta 13. (Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele přirozených čísel a, b)[21]: Přeznačme si čísla a, b tak, aby $b \geq a$. Proveďme nyní následující posloupnost dělení se zbytkem (podle věty 11):

$$\begin{array}{rlll}
b : a = q_0, \text{ zbytek je } r_0, & \text{tedy máme vztah} & (v) & b = a \cdot q_0 + r_0; \\
a : r_0 = q_1, \text{ zbytek je } r_1, & \text{tedy máme vztah} & (iv) & a = r_0 \cdot q_1 + r_1; \\
r_0 : r_1 = q_2, \text{ zbytek je } r_2, & \text{tedy máme vztah} & (iii) & r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2; \\
 & & \vdots & \\
r_{n-2} : r_{n-1} = q_n, \text{ zbytek je } r_n, & \text{tedy máme vztah} & (ii) & r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n; \\
r_{n-1} : r_n = q_{n+1}, \text{ zbytek je } 0, & \text{tedy máme vztah} & (i) & r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1};
\end{array}$$

Pak poslední nenulový zbytek r_n v této posloupnosti dělení je roven největšímu společnému děliteli čísel a, b.

<u>Důkaz:</u> Protože $a > r_0 > r_1 > \ldots$, tak po konečném počtu kroků musí nastat $r_{n+1} = 0$. Další důkaz provedeme ve dvou krocích: a) dokážeme, že $r_n|a$, $r_n|b$; b) dokážeme, že každý jiný dělitel j, který dělí a i b, dělí i r_n.

ad a) Uvažujme vztahy $(i), (ii), \ldots, (v)$ z tvrzení věty (postupujeme nyní od spodního vztahu (i) k hornímu vztahu (v)):

$$\begin{array}{rl}
(i) \overset{v.12a}{\Rightarrow} & r_n | r_{n-1} \\
(ii) \overset{v.12a}{\Rightarrow} & r_n | (r_{n-1} \cdot q_n + r_{n-2}), \text{ tj. } r_n | r_{n-2} \\
\vdots & \\
(iii) \overset{v.12a}{\Rightarrow} & r_n | r_0 \\
(iv) \overset{v.12a}{\Rightarrow} & r_n | (r_0 \cdot q_1 + r_1), \text{ tj. } r_n | a \\
(v) \overset{v.12a}{\Rightarrow} & r_n | (a \cdot q_0 + r_0), \text{ tj. } r_n | b
\end{array}$$

Z posledních dvou řádků plyne, že r_n je společným dělitelem čísel a i b.

[20] Viz [15], str. 13.
[21] viz [15], str. 13-14.

ad b) Uvažujme nyní jiného dělitele j čísel a i b a postupujme nyní od horního vztahu (v) ke spodnímu vztahu (i):

$$\begin{array}{rll} (v) \overset{v.12b}{\Rightarrow} & j|b \wedge j|a & \Rightarrow \quad j|r_0 \\ (iv) \overset{v.12b}{\Rightarrow} & j|a \wedge j|r_0 & \Rightarrow \quad j|r_1 \\ (iii) \overset{v.12b}{\Rightarrow} & j|r_0 \wedge j|r_1 & \Rightarrow \quad j|r_2 \\ \vdots & & \\ (ii) \overset{v.12b}{\Rightarrow} & j|r_{n-2} \wedge j|r_{n-1} & \Rightarrow \quad j|r_n \end{array}$$

Každý jiný dělitel j čísel a, b je i dělitelem čísla r_n (viz poslední řádek), tj. r_n je ze všech dělitelů čísel a, b ten největší. □

B)převod zlomku na tvar s ukončeným nebo neukončeným desetinným rozvojem

Označení daných číselných oborů N, Z, Q, $R := Q \cup I$, C už bylo zmíněno v přednášce první, na tomto místě se chvíli věnujme rozdílu mezi množinami Q a I: uvedeme nyní velmi jednoduchý princip, který souvisí s důkazem typu 14, a pak pomocí tohoto principu dokážeme větu 14, která ukazuje na hlavní rozdíl mezi racionálními čísly (= čísly, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku) a iracionálními čísly (která nelze vyjádřit ve tvaru zlomku).

Typ důkazu číslo 14: Dirichletův princip.

Pokud rozdělujeme $n + 1$ předmětů do n přihrádek, aspoň v jedné přihrádce najdeme po rozdělení aspoň dva předměty.

Platnost Dirichletova principu[22] je vidět „přirozeně“ = celkem s ní každý souhlasí. V tom nejhorším případě se může totiž stát, že po rozdělení n předmětů je v každé z n přihrádek jeden – ale ten poslední „n plus první“ předmět, už musíme tedy přidat do nějaké přihrádky, kde nějaký jeden předmět je ... tedy v aspoň jedné přihrádce budou po rozdělení aspoň dva předměty. Samozřejmě se může stát, že pokud předměty rozdělujeme libovolně, nikoli rovnoměrně, po rozdělení budou dva nebo tří předměty v pěti přihrádkách a řada dalších přihrádek bude prázdná – to je možné. Nás ale jen zajímá, že určitě existuje jedna přihrádka (šuplík) obsahující aspoň dva předměty – tento fakt je zaručen tím, že předmětů je více než přihrádek.

Tento velmi jednoduchý typ důkazu lze kupodivu použít při důkazu celkem důležité následující věty, která vystihuje rozdíl mezi číslem racionálním a číslem iracionálním.

[22] Též: přihrádkový princip, anglicky – pigeonhole principle neboli princip holubníku, protože býval často formulován o $(n + 1)$ holubech nalétávajících do holubníku o k komorách.

(věta 14) Každé racionální číslo má desetinný rozvoj buď konečný, nebo periodický.

Důkaz: Uvažujme nejprve konkrétní zlomek $\frac{1}{7}$ jako vyjádření jednoho racionálního čísla a nalezněme jeho desetinný rozvoj, tj. vyjádření ve tvaru s desetinnou čárkou – všechny úvahy pak lze vztáhnout na obecné racionální číslo $\frac{m}{n}$ pro $m \in Z$, $n \in N$.

Při dělení 1 : 7 postupujeme následovně:

- $1 : 7 = 0$, zbytek 1, napíšeme desetinnou čárku do výsledku a připíšeme nulu;
- $10 : 7 = 1$, zbytek 3, ke zbytku připíšeme nulu;
- $30 : 7 = 4$, zbytek 2, ke zbytku připíšeme nulu;
- $20 : 7 = 2$, zbytek 6, let us put down another zero to the remainder;
- $60 : 7 = 8$, the remainder is 4, let us put down another zero to the remainder;
- $40 : 7 = 5$, the remainder is 5, let us put down another zero digit to the remainder;
- $50 : 7 = 7$, the remainder is 1, let us put down another zero digit to the remainder;
- Od této chvíle dělíme $10 : 7 = 1$, zbytek 3 ... ale to už tady jednou bylo, zbytky i výsledky po dělení se začínají periodicky opakovat. Proč tomu tak je?

Rozeberme si tuto situaci: Při dělení sedmi se po určité době dělenec „vyčerpá" v tom smyslu, že neobsahuje žádné další cifry a přidáváme ke zbytku v nižších řádech pouze nuly[23]. Jediný vliv na každý další řádek písemného dělení mají tedy jen zbytky zbytky po dělení sedmi, ke kterým připisujeme stále jen nulu.

Víme, že zbytků po dělení sedmi je sedm různých – jsou to čísla (a současně cifry) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. A nyní využijeme Dirichletův (přihrádkový) princip: Stačí provést osm kroků částečného dělení po „vyčerpání" dělence a protože možných zbytků po dělení sedmi je pouze sedm, jeden zbytek se po daných osmi krocích zopakuje dvakrát – a po zopakování daného zbytku se už periodicky opakují všechny další zbytky ve stejném pořadí, takže desetinný rozvoj našeho čísla je nekonečný, ale periodický.

Přesněji řečeno, pokud některý z dílčích zbytků je roven nule, v dělení už nepokračujeme a desetinný rozvoj takového zlomku je konečný. Tedy obecně lze říci, že při dělení $m : n$ po „vyčerpání" dělence m (který má konečně mnoho cifer, a tak se vyčerpat někdy musí) stačí provést dalších maximálně $n+1$ kroků a dostaneme dílčí zbytek nula (tj. desetinný rozvoj daného racionálního čísla je konečný, ukončený), nebo se některý z nenulových zbytků zopakuje (a tedy desetinný rozvoj daného čísla je nekonečný periodický). □

C) Komplexní čísla

Komplexním číslům budou věnovány asi čtyři týdny v předmětu Algebra 1 (druhý semestr), takže partie o komplexních číslech byla přesunuta do příslušných skript. Nedočkavcům doporučuji středoškolskou učebnici [16], která seznamuje s komplexními čísly stručně a celkem dobře na 56 stranách.

[23] Nám se dělenec v našem příkladu dělení vyčerpal už po prvním kroku, protože byl jednociferný.

5.2 Cvičení

Cvičení 5.1. Procvičte si praktické užití věty 11 a najděte podíl a nezáporný zbytek při dělení a) čísla 30 číslem 7; b) čísla -25 číslem 6.

Cvičení 5.2. Procvičte si praktické užití věty 13: podle procesu popsaného ve větě 13 nalezněte největšího společného dělitele čísel 208 a 364. Nalezněte tohoto dělitele také druhým způsobem, a sice rozkladem čísel na součin prvočísel.

Cvičení 5.3. Procvičte si praktické užití věty 14 a převeďte zlomky $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ a $\frac{3}{7}$ na čísla s desetinným rozvojem.

Cvičení 5.4. U všech následujících pojmů se pokuste o dokončení definice pomocí symbolického zápisu bez českých slov, a všechny tyto definice se pokuste negovat. Všimněte si, že na rozdíl od přednášky se pojmy definují pouze pro přirozená čísla – cílem je procvičit symbolický zápis definic, které studenti dobře znají ze střední školy.

a) pro přirozená čísla a, b definujeme: b je **násobek čísla** a, jestliže ...

b) pro přirozená čísla a, b definujeme: a je **dělitel čísla** b, jestliže ...

c) pro přirozená čísla a, b, d definujeme: d je **společný dělitel čísel** a**,** b, jestliže ...

d) pro přirozená čísla a, b, D definujeme: D je **největší společný dělitel čísel** a**,** b, jestliže ...

e) pro přirozená čísla a, b, n definujeme: n je **společný násobek čísel** a**,** b, jestliže ...

f) pro přirozená čísla a, b, n definujeme: m je **nejmenší společný násobek čísel** a**,** b, jestliže ...

g) pro přirozené číslo $p > 1$ definujeme: p je **prvočíslo**, jestliže ...

h) pro přirozená čísla a, b definujeme: a, b jsou **nesoudělná čísla** jestliže ...

Cvičení 5.5. Naučte se na prověrku důkaz věty 11.

Cvičení 5.6. Naučte se na prověrku důkaz věty 12.

Cvičení 5.7. Naučte se na prověrku důkaz věty 14.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.5.

6 Binární relace a její vlastnosti

6.1 Přednáška

Třetí odpovědí na otázku o podstatě matematiky je pojem binární relace na množině. Tento pojem je klíčovým pojmem tohoto předmětu, protože všechny klíčové definice následujících kapitol (uspořádání, ekvivalence, zobrazení, posloupnost funkce) jsou speciálním příkladem relace.

Plán šesté přednášky:

- Šestá přednáška je kratší, protože první hodina je strávena testíkem. Ve druhé hodině zbyde čas jen na motivaci relace, několik příkladů ze života i z matematiky.
- Definice relace: lidová – soubor určitých vazeb-vztahů mezi prvky dvou různých množin (to by byla relace mezi množinami A a B), nebo mezi prvky jedné množiny (to by byla relace na množině A).
- Nebo: množina uspořádaných dvojic reprezentujících vazby mezi prvky (daných dvou množin, nebo dané jedné množiny).
- A konečně přesná definice relace: nějaká podmnožina kartézského součinu $A \times B$, respektive (u relace na množině) $A \times A$.
- Zadání přesné matematické je množinou uspořádaných dvojic. Reprezentace relace bude pro nás nejčastěji pomocí kartézského grafu nebo orientovaného diskrétního grafu.
- Průchod definic vlastností relace, (11), anti-(11), (12), anti-(12), (13), (14); a vždy vysvětlení, jak lze tuto vlastnost poznat z kartézského grafu či z diskrétního grafu.
- V ideálním případě se zakončí příkladem 6.2, který se zadá studentům, aby si jej do začátku cvičení vytvořili, a tím si poprvé sami prošli uvedených šest vlastností relace. Letos se nestihlo a začínáme tím šesté cvičení.

a) Pojem relace V běžném životě užíváme řadu relací mezi prvky dvou různých množin, např.

- „mám v rozvrhu“ je relace mezi množinou dnů v týdnu a množinou předmětů ve škole;
- „má občas k snídani“ je relace mezi množinou lidí a množinou potravin (poživatin);

Příkladem relací mezi prvky jedné množiny jsou

- „je biologickým dítětem“ ... relace na množině lidí; zvláštní vlastností této relace je to, že každé dítě je v relaci se dvěma rodiči;
- „jeho matka je“ ... relace na množině lidí; zvláštní vlastností této relace je to, že jedno dítě je v relaci s jedinou matkou, tj. tato relace splňuje podmínku zobrazení (viz kapitola 10): každé dítě jednoznačně odkazuje na svou matku.

- $\leq$, $\geq$ na množině celých čísel;
- $|$ (dělí = je dělitelem) na množině přirozených čísel;
- $\subseteq$, $\supseteq$ na množině všech podmnožin dané množiny;
- atd.

Lidově řečeno, relace je množina nějakých vztahů, přičemž každý vztah spojuje dva objekty (dva prvky) buď ze dvou různých množin, nebo z jedné množiny. Platí ovšem ještě jedna věc, kterou splňují všechny výše uvedené příklady: v tomto vztahu mezi dvěma objekty záleží na pořadí, ve kterém je uvádíme – to se rozumí samo sebou, ale zejména v relaci mezi prvky téže množiny si musíme dát pozor, který prvek uvádíme jako první a který jako druhý, aby bylo patrno, např. kdo je matka a kdo dcera; které číslo je menší než to druhé číslo, apod.

Nicméně kromě lidové definice musí všichni studenti umět i přesnou, matematickou definici:

Definice 31a: relace mezi množinami M_1 a M_2 je nějaká podmnožina kartézského součinu $M_1 \times M_2$. **Definice 31b:** relace na množině M je nějaká podmnožina kartézského součinu $M \times M$.

Prvky relace jsou tedy uspořádané dvojice $[x, y]$, ve kterých záleží na pořadí. Pozor na rozdíl mezi pojmem kartézský součin a relace – kartézský součin je množina všech možných uspořádaných dvojic, které můžeme z daných dílčích množin sestavit; kdežto relací rozumíme každou podmnožinu kartézského součinu. Např. pro $M = \{1, 2, 3\}$ je

$$M \times M = \{[1; 1], [2; 2], [3; 3], [1; 2], [2; 1], [1; 3], [3; 1], [2; 3], [3; 2]\},$$

ovšem např. relace „je ostře menší než“ obsahuje jen některé uspořádané dvojice přirozených čísel z kartézského součinu $M \times M$:

$$\text{je ostře menší než } = \{[1; 2], [1; 3], [2; 3]\}.$$

Poznámka: Rozdíl mezi relacemi a operacemi

Kromě řady relací se v matematice používá řada operací. O operacích (např. sčítání, odčítání, průnik, sjednocení) bude ještě řeč – nyní jen zmíníme hlavní rozdíl mezi relacemi a operacemi: výsledkem operace $*$ (za hvězdičku si dosaďte např. sčítání, násobení, průnik, apod) mezi dvěma prvky a, b je obecně nějaký třetí prvek $a * b$ (např. $2+3 = 5$), kdežto relace jen uvádí do vztahu dané dva prvky a, b (např. $2 \leq 3$).

b) Zadání a reprezentace relace: Relaci lze zadávat

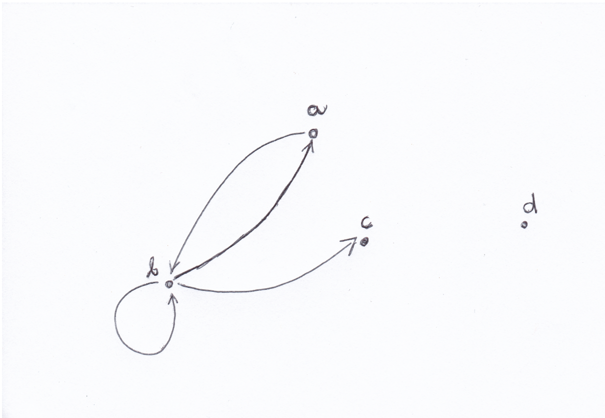
- **výčtem uspořádaných dvojic**: například

$$\rho = \{[a, b], [b, a], [b, c], [b, b]\};$$

ve shodě s učebním textem [14], str.17, budeme též relaci vypisovat takovým stylem, že označení relace bude umístěno v zápise mezi danými prvky (podobně jako znak „$\leq$“ je napsán mezi čísly 2 a 3, tj. v našem příkladu tatáž relace bude zapsaná pomocí vztahů

$$a\rho b,\ b\rho a,\ b\rho c,\ b\rho b.$$

- **orientovaným diskrétním grafem**, kde prvek $[a, b]$ znázorníme šipkou vycházející z a a směřující do b, prvek $[b, b]$ znázorníme smyčkou z b do b, atd. Tedy v našem příkaldu relace se čtyřmi prvky (= čtyřmi vztahy = čtyřmi dvojicemi)



Obrázek 2: Grafová reprezentace relace ρ – příklad.

- **maticí**, tedy pro tentýž příklad:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(na průsečíku prvního řádku (= řádku prvku a) a druhého sloupce (= sloupce prvku b) matice je hodnota 1, protože uspořádaná dvojice $[a, b]$ je prvkem relace ρ; dále na průsečíku druhého řádku a druhého sloupce matice je 1, protože smyčka $[b, b]$ je prvkem relace ρ; na třetím a čtvrtém řádku matice jsou samé nuly, protože c ani d není první souřadnicí žádné uspořádané dvojice z ρ, atd). Čtyřem šipkám v grafové reprezentaci odpovídají čtyři hodnoty 1 v matici relace.

Reprezentace maticí je vhodná pro výpočet skládání relací, ale my se tomuto skládání relací nebudeme věnovat.

- **kartézským grafem** viz přednáška, ve skriptech DOPLNIT. Kartézský graf navazuje na definici kartézského součinu – pak relace na množině M (nebo relace mezi množinami A, B) je nějaká podmnožina „kartézské sítě“ $M \times M$ (či „kartézské sítě“ $A \times B$).

c) Základní vlastnosti relace: U pojmu relace budeme studovat určité další definované vlastnosti a rysy, to zejména u relace typu 31b, tj. **relace na množině** M.

Příklad 6.1. (vyučující – studenti) V následujících definicích řekněte,

(i) jak lze danou vlastnost poznat z grafové reprezentace relace (a z reprezentace maticí);

(ii) uveďte příklad této relace ze života nebo z matematiky.

Relace ρ na množině M se nazývá (kromě čísla identifikujícího danou vlastnost si prosím pamatujte i její název)

reflexivní, když $\forall x \in M \;: x\rho x$ (vlastnost **(11)**)

(Slovně: Každý prvek zadané množiny je v relaci se sebou samotným);

antireflexivní, když $\forall x \in M \;: \neg(x\rho x)$; (vlastnost **(anti-11)**)

(Slovně: Žádný prvek zadané množiny není v relaci se sebou samotným);

symetrická, když $\forall x, y \in M \;: x\rho y \Rightarrow y\rho x$; (vlastnost **(12)**)

(Lidově: každý vztah, který existuje, je oboustranný! Přesně matematicky: Relace může obsahovat uspořádané dvojice stejných prvků a musí s každou dvojicí různých prvků obsahovat i dvojici těchto prvků v opačném pořadí);

antisymetrická, když $\forall x, y \in M \;: (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$; (vlastnost **(anti-12)**)

(Lidově: žádný vztah (kromě vztahu k sobě samému) není oboustranný. Přesně matematicky: Relace může obsahovat uspořádané dvojice stejných prvků a nesmí s žádnou dvojicí různých prvků obsahovat také dvojici prvků v opačném pořadí);

tranzitivní, když $\forall x, y, z \in M \;: x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$; (vlastnost **(13)**)

(Lidově řečeno: Relace dědičnosti, neboli prvek z automaticky zdědí od prvku y i jeho vztah k prvku x. Přesně matematicky: Pokud prvek x je v relaci s prvkem y a prvek y je v relaci s prvkem z, tak musí být i prvek x v relaci s prvkem z);

úplná, když $\forall x, y \in M \;: x\rho y \vee y\rho x$; (vlastnost **(14)**)

(Pro každou dvojici prvků (nebo i stejné prvky) musí platit, že prvek x je v relaci s prvkem y nebo prvek y je v relaci s prvkem x).

Poznámky k úplné relaci. Z definice úplné relace je vidět, že úplná relace je automaticky reflexivní (tj. pro $x = y$ plyne, že $x\rho x$. Někdy se úplná relace definuje na základě podmínky, která platí jen pro navzájem různé prvky, tj. zhruba jako

$$\forall x, y \in M \ : x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x;$$

my se ovšem budeme držet té definice úplné relace, která zahrnuje i reflexivitu. Tato rozdílnost v definici zpravidla nehraje roli, protože většina relací, které jsou zajímavé pro naše studium a používané v praxi, jsou úplné a současně reflexivní.

A ještě jedna poznámka k úplné relaci: úplná relace stále ještě nemusí být rovna kartézskému součinu daných množin (nebo kartézské mocnině dané množiny): Například relace „$\leq$“ na množině přirozených čísel je úplná, ale neobsahuje všechny možné uspořádané dvojice z kartézského čtverce (= kartézské druhé mocniny) $N \times N$, protože například $[2; 1]$ není prvkem relace „$\leq$“.

Příklad 6.2. (v trojicích, jen studenti) Vezměte si stránku A4 a rozdělte na osm částí. V každé části nakreslete pět bodů znázorňujících pětiprvkovou množinu, označte je a, b, c, d, e. Do množiny šipkami znázorněte relaci, která

1. je reflexivní,
2. je antireflexivní,
3. není ani reflexivní, ani antireflexivní[24],
4. je symetrická,
5. je antisymetrická,
6. není ani symetrická, ani antisymetrická[25],
7. je tranzitivní,
8. není tranzitivní.

Příklad 6.3. (v trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace | (dělí, je dělitelem) na množině$(Z, \cdot)$? Relaci | definujeme normálně, jak bychom u dělitelnosti čekali:

$$\forall x, y \in Z : \quad x|y \Leftrightarrow (\exists p \in Z : y = x \cdot p)$$

Příklad 6.4. (vyučující – studenti) Může být některá relace symetrická a antisymetrická současně?

[24]Takové relace existují, protože vlastnosti reflexivity a antireflexivity nejsou si navzájem negacemi, nýbrž „opačnými póly spektra“ vzhledem ke sledované vlastnosti.

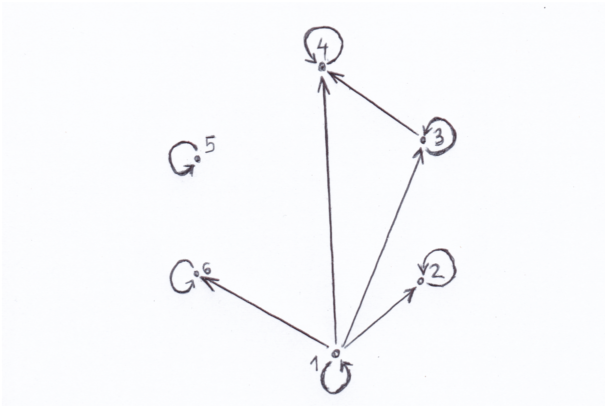
[25]Takové relace existují, protože vlastnosti symetrie a antisymetrie nejsou si navzájem negacemi, nýbrž „opačnými póly spektra“ vzhledem ke sledované vlastnosti.

Příklad 6.5. (v trojicích, jen studenti) U následujících příkladů rozhodněte, jaké vlastnosti splňují zadané relace:

a) Relace $\leq$ na množině $N = \{1, 2, 3, \dots\}$;

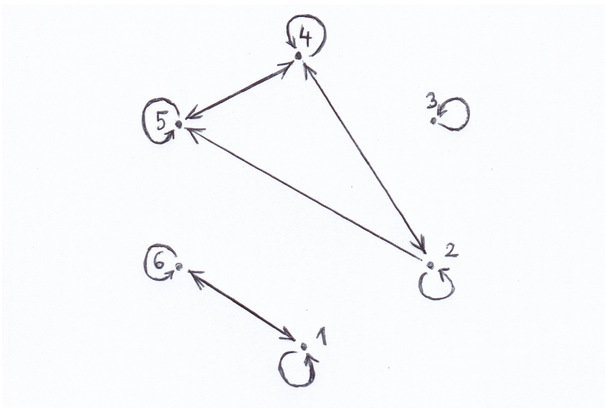
b) relace $\parallel$ (být rovnoběžný) na množině přímek v rovině;

c) Relace je zadána grafovou reprezentací[26] na obrázku 3:



Obrázek 3: Příklad 6.5.c.

d) Zadání opět grafem[27], obrázek 4:



Obrázek 4: Příklad 6.5.d.

d) Pojem inverzní relace: Definice 32: Inverzní relace ρ^{-1} k relaci ρ je taková relace, která obsahuje právě ty uspořádané dvojice, které byly utvořeny z prvků relace ρ přehozením pořadí prvků.

Tedy platí

$$\rho^{-1} = \{[y, x] \in M \times M \quad : \quad [x, y] \in \rho\}.$$

26 [14], str.20, obr. 2a.

27 [14], str.20, obr. 2b.

Inverzní relaci k zadané relaci sestrojíme velmi jednoduše v grafové reprezentaci – v inverzní relaci se všechny šipky grafové reprezentace otočí opačným směrem (a smyčky zůstanou, protože na orientaci smyčky v grafové reprezentaci prvku $[x; x]$ nezáleží). V maticové reprezentaci se matice transponuje podle hlavní diagonály, tj. pro ty, kdo ještě nerozumí, o čem je řeč: řádky maticové reprezentace relace ρ se napíší do sloupců maticové reprezentace relace ρ^{-1}.

Z definice pojmu inverzní relace k relaci na množině je vidět, že pro jakoukoli relaci ρ její inverzní relace ρ^{-1} vždy existuje.

6.2 Cvičení

Návrh šestého cvičení:

- Začneme cvičením 6.3: kolik možných relací existuje na dvojprvkové množině, trojprvkové množině? ... hodně ... tj. už na malých množinách existují různé možné soubory vztahů-vazeb, neboli relace.
- Příklad 6.2 z přednášky, pokud se nestihl už na přednášce.
- Doplnění definic, které se nestihly, letos: a) definice antisymetrie, b) alternativní definice antisymetrie, která na levé straně implikace vylučuje rovnost prvků, tj. pak v tvrzení implikace je pro studenty přirozenější varianta: „opačná vazba“ mezi dvěma různými prvky je zakázána; c) definice úplné relace; také lze zmínit dvě různá pojetí, u toho, které je ve skriptech napsáno, budeme počítat s tím, že z úplnosti už plyne reflexivita (u úplnosti zejména poznámka-příklad na pětiprvkové množině, že úplnost neznamená, že by relace musela obsahovat všechny vazby).
- Některé základní zkoumání relací, budeme procházet každou z vlastností R, AR, S, AS, T, U:
  - relace rovnoběžnosti přímek v rovině;
  - relace kolmosti přímek v rovině;
  - relace dělitelnosti na množině přirozených čísel;
  - relace $\leq$ na množině přirozených čísel;
  - relace $\subseteq$ na množině 2^A všech podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
- A ještě skupina příkladů na reprezentaci relace kartézským grafem:
  - relace $\rho = \{[1; 2], [2; 2], [3; 3], [4; 4]\}$; jaké má tato relace vlastnosti? je tato relace zobrazením? náznak definice zobrazení; co je to první obor relace, co je to druhý obor relace? přesné definice O_1, O_2: Pro relaci ρ mezi množinami X a Y nazveme prvním oborem relace ρ množinu

$$O_1 := \{x \in X : \exists y \in Y : [x, y] \in \rho\}$$

a druhým oborem relace ρ množinu

$$O_2 := \{y \in Y : \exists x \in X : [x, y] \in \rho\}.$$

– relace dělitelnosti na množině $\{2; 3; 4; 6; 11; 18\}$; je tato relace zobrazením? přesná definice zobrazení a) pomocí zákazu dvou prvků nad sebou v kartézském grafu;: relace ρ mezi množinami X a Y je zobrazením, jestliže

$$\forall x \in X,\ \forall y, z \in Y:\ ([x, y] \in \rho \ \wedge\ y \neq z) \ \Rightarrow\ [x, z] \notin \rho.$$

b) pomocí formulace „existuje nejvýše jeden prvek“: relace ρ mezi množinami X a Y je zobrazením, jestliže

$$\forall x \in X, \exists \text{ nejvýše jeden prvek } y \in Y:\ ([x, y] \in \rho.$$

... formulace je dobrá, ale není zcela bez českých slov, proto preferujme definice a) nebo: c) pomocí tzv. prvního a druhého oboru relace ρ lze definici b) vylepšit na „existuje právě jeden“: relace ρ mezi množinami X a Y je zobrazením, jestliže

$$\forall x \in O_1(\rho)\ \exists! y \in O_2(\rho):\ \ [x, y] \in \rho.$$

– pokusme se prozkoumat podmínku tranzitivity z kartézského grafu ohledně návaznosti vazeb mezi čísly 3, 6, 18 z předchozího příkladu ... formulace není jednoduchá, pomocí jistého obdélníku a úhlopříčky obdélníku? Nebudu po vás chtít.

Cvičení 6.1. Úvodní cvičení k pojmu **relace**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2102 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 6.2. Úvodní cvičení k pojmu **zobrazení**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2103 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 6.3. Nakreslete všechny relace (v grafové reprezentaci) na a) jednoprvkové možině, b) na dvouprvkové množině, c) na tříprvkové množině; d) pokuste se vyslovit větu o počtu všech relací na $n-$prvkové množině.

Cvičení 6.4. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která je symetrická a současně není tranzitivní.

Cvičení 6.5. Pokud dvě relace ρ_1, ρ_2 jsou obě tranzitivní, pak jejich sjednocení $\rho_1 \cup \rho_2$ je také tranzitivní. Dokažte nebo vyvraťte tvrzení v předchozí větě[28].

Cvičení 6.6. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická a obsahuje mimo jiné také prvky $[3; 4]$ a $[4; 3]$.

Cvičení 6.7. a) Je relace dělitelosti $|$ antisymetrická na množině N? b) Je relace dělitelnosti $|$ antisymetrická i na množině Z?

[28]Pokud si studenti neví rady, doporučte nakreslení tří obrázků: jeden obrázek pro relaci ρ_1, druhý pro relaci ρ_2 a třetí pro relaci $\rho_1 \cup \rho_2$. Dále doporučte studentům tvrzení spíše vyvracet než dokazovat.

Cvičení 6.8. Na množině Z je dána relace ρ definovaná vztahem

$$x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y.$$

Určete její vlastnosti, zejména ověřte (11), anti-(11), (12), anti-(12), (13), (14).

Cvičení 6.9. Negujte vlastnost (12) relace ρ na množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost (12) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.10. Negujte vlastnost anti-(12) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost anti-(12) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.11. Negujte vlastnost (13) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost (13) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.12. Podmnožiny X, Y množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou v relaci ρ, když $X \cup Y = A$. Zjistěte, které z vlastností (11), anti-(11), (12), anti-(12), (13), (14) platí pro tuto relaci.

Cvičení 6.13. Na množině přirozených čísel je dána relace ρ_1 takto: $x\rho_1 y$, když $x \cdot y$ je liché číslo. Zjistěte, jaké vlastnosti ((11), anti-(11), (12), anti-(12), atd.) má tato relace.

Cvičení 6.14. Ve fotbalové lize hraje[29] v každém ročníku každý tým s každým jiným týmem dva zápasy, z toho jeden zápas se hraje na hřišti jednoho týmu a druhý na hřišti druhého týmu. Definujme relaci $a\rho_2 b$ tehdy, když tým A hraje proti týmu B na svém hřišti v daném roce. Určete vlastnosti relace na množině všech týmů ligy v daném ligovém ročníku.

Cvičení 6.15. Co se ještě nedělalo z příkladů B1 (tento příklad obsahuje inverzní relaci), B2, B6, B8, B9, B10, B11 na stranách 48-49 sbírky [17].

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.6.

[29]Tento systém platil do roku 2018, Od té doby to v první fotbalové lize bude podle všeho fungovat jinak: kromě dvou zápasů každého s každým jsou v daném roce ještě další ligové zápasy s některými soupeři, jakási nadstavbová část. Tuto situaci v příkladu neuvažujte.

7 Ekvivalence a rozklady

V tomto týdnu se budeme zabývat jedním důležitým typem relace, a sice relací ekvivalence na množině – pozor, nezaměňovat s logickou ekvivalencí. Relace ekvivalence je jistým typem binární relace na množině. Nejnovější plán přednášky 7:

- Ohlasy z testíku (a) ... budou se hodit, protože studenti někteří budou ještě potvrzovat znalosti;
- z kapitoly 6 dodělejme ještě inverzní relaci ρ^{-1} ... definici a příklad $\leq$ versus $\geq$ na množina přirozených čísel, příklad $\subseteq$ versus $\supseteq$ na množině všech podmnožin 2^A množiny A.
- kapitola 7: příklad základní školy, která má šestnáct tříd samostatných, v každém ročníku dvě ... těchto šestnáct podmnožin množiny všech žáků M tvoří rozklad množiny M. Definice rozkladu množiny.
- Relace ρ určená rozkladem ... znázorníme diskrétním orientovaným grafem (soustavou šipek), určíme vlastnosti této relace:
$$\rho = \{[x, y] \in M \times M : \exists M_i \ : \ x \in M_i \ \wedge \ y \in M_i\}.$$
- Definice relace ekvivalence ... vztah mezi logickou ekvivalencí a relací ekvivalence; každé relace určená (indukovaná) rozkladem množiny na podmnožiny je tedy ekvivalence.
- Pokusme se zkoumat na sedmiprvkové množině? Může být nějaká relace ekvivalence daná jinak než rozkladem na podmnožiny? Na několika obrázcích zjišťujeme, že při každé relaci ekvivalence znázorněné orientovaným diskrétním grafem vznikají na tomto grafickém znázornění „shluky prvků“, které když umístíme do jedné podmnožiny, dostaneme postupně rozklad množiny M na podmnožiny, resp. **systém podmnožin určený ekvivalencí** ρ ... dostaneme podmnožiny
$$M_i = \{x \in M : \exists y \in M : x\rho y\}.$$
- Shrnutí předchozího bodu: lze jednoduše popsat postup, na základě něhož sestavíme rozklad na podmnožiny určený zadanou relací ekvivalence: a) vybereme libovolný prvek y Neumístěný do žádné vytvářené podmnožiny rozkladu; b) najdeme všechny prvky, které jsou s prvkem y v relaci ekvivalence; ze symetrie relace víme, že vazby existují i „opačným směrem“; a z tranzitivity relace víme, že vlastně mezi takto vybranými prvky existují úplně všechny vazby; c) smyčky existují kolem každého prvku, to plyne z reflexivity naší relace; d) opakováním kroků a),b) dostáváme různé podmnožiny hledaného rozkladu ... tento rozklad nazveme rozklad určený-utvořený-indukovaný zadanou ekvivalencí;
- Důležitým příkladem relace ekvivalence je kongruence modulo 5, viz příklad v textu; protože se jedná o relaci ekvivalence, lze sestrojit rozklad množiny Z na pět podmnožin. Množina těchto podmnožin $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ (rozklad určený ekvivalencí) se nazývá faktormnožina, nebo též rozkladová množina určená zadanou ekvivalencí.

7.1 Přednáška

Definice 33: Relace ρ na množině M se nazývá ekvivalence, pokud splňuje vlastnosti (11), (12) a (13).

Příklad 7.1. Relace rovnoběžnosti na množině přímek v rovině je ekvivalence (viz příklad 6.5.b). Ověřte, že platí vlastnosti (11), (12), (13).

Příklad 7.2. Na množině všech zlomků existuje známá ekvivalence ρ mezi těmi zlomky, které všechny lze zkrátit na jeden základní tvar. Tuto relaci ekvivalence na množině Q všech zlomků lze definovat takto:

$$\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] \in \rho \text{ tehdy, když platí } ad = bc.$$

Například $\frac{3}{5}$ je číslo ekvivalentní s číslem $\frac{15}{25}$, které lze převést na $\frac{3}{5}$ vykrácením čitatele i jmenovatele pěti (platí tedy definiční podmínka $3 \cdot 25 = 5 \cdot 15$).

Nebo číslo $\frac{-1}{3}$ je v ekvivalenci s číslem $\frac{-3}{9}$, které lze převést na $\frac{-1}{3}$ vykrácením třemi (protože platí $(-1) \cdot 9 = 3 \cdot (-3)$), atd.

S pojmem relace ekvivalence velmi úzce souvisí další pojem, a to rozklad množiny.

Definice 34: Řekneme, že systém podmnožin M_i množiny M tvoří rozklad množiny M, když

a) $M_i \neq \emptyset$;

b) $\bigcup_{i=1,\dots,n} M_i = M$;

c) $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Tj. ad a) množiny $M_i$jsou neprázdné, ad b) sjednocením množin M_i je celá množina M, a ad c) množiny M_i jsou po dvou disjunktní, tj. každé dvě z nich mají prázdný průnik.

Příklad 7.3. Vypište (a znázorněte graficky) všechny možné rozklady tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$. Řešení: viz příprava ... takových možných rozkladů existuje pět: a) rozklad M na tři jednoprvkové podmožiny, b) rozklad M na $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{c\}$; c) rozklad M na $M_1 = \{a, c\}$ a $M_2 = \{b\}$; d) rozklad M na $M_1 = \{b, c\}$ a $M_2 = \{a\}$; e) a konečně, rozklad M na jedinou tříprvkovou podmnožinu $M_1 := M$. □

Pojem rozkladu je spojen s definicí ekvivalence následujícími dvěma způsoby:

A) Konstrukce ekvivalence na základě rozkladu

Je zadán rozklad množiny M – definujeme-li relaci E vztahem

$$xEy \Leftrightarrow x, y \in M_i \quad \text{pro nějaké } i,$$

(prvky x, y jsou v relaci, když leží ve stejné třídě rozkladu), pak tato relace je ekvivalence a nazývá se relace určená (= indukovaná) rozkladem množiny M (**definice 35**).

Příklad 7.4. Napište relaci ekvivalence indukované (= určené) každým z rozkladů tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$ v předchozím příkladu.

Příklad 7.5. (jen studenti) a) Nakreslete všechny možné rozklady čtyřprvkové množiny $M = \{a, b, c, d\}$; b) jinou barvou do diagramů těchto rozkladů vyznačte (pomocí grafové reprezentace) relaci ekvivalence indukovanou vždy daným rozkladem. Na obě části úkolu máte dohromady deset minut.

B) Konstrukce rozkladu na základě ekvivalence

Je zadána ekvivalence E na množině M – definujeme-li rozklad M způsobem „v jedné třídě rozkladu leží právě ty prvky, které jsou navzájem všechny po dvojicích ekvivalentní“, dostaneme také strukturu označenou stejně jako v předchozí definici s tím rozdílem, že první nebylo vejce, ale slepice (promiňte – první nebyl rozklad, ale ekvivalence), a množina $M/_E$ se nazývá (**definice 36**) faktorová množina množiny M podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina[30], značíme (**označení 31**)

$$M/_E := \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Pro upřesnění, které se nám bude hodit v předmětu Algebra 1, dodejme, že jednotlivé třídy M_i považujeme za prvky této faktormnožiny $M/_E$.

Ad příklad 7.2. Pokud se vrátíme k relaci = (rovnost zlomků), tak v jedné třídě rozkladu $Q/_=$ jsou právě ty zlomky, které lze krácením či rozšířením převést navzájem jeden na druhý. **Říkáme, že každá třída rozkladu označuje jedno racionální číslo – a toto číslo lze reprezentovat libovolným zlomkem z dané třídy**. Tedy racionální číslo je označení pro celou množinu zlomků, z nichž všechny mají tentýž jediný obraz na reálné ose! To je důležitý rozdíl mezi pojmem zlomku a pojmem racionálního čísla, který lze vyjádřit právě pomocí rozkladu množiny všech zlomků podle uvažované ekvivalence.

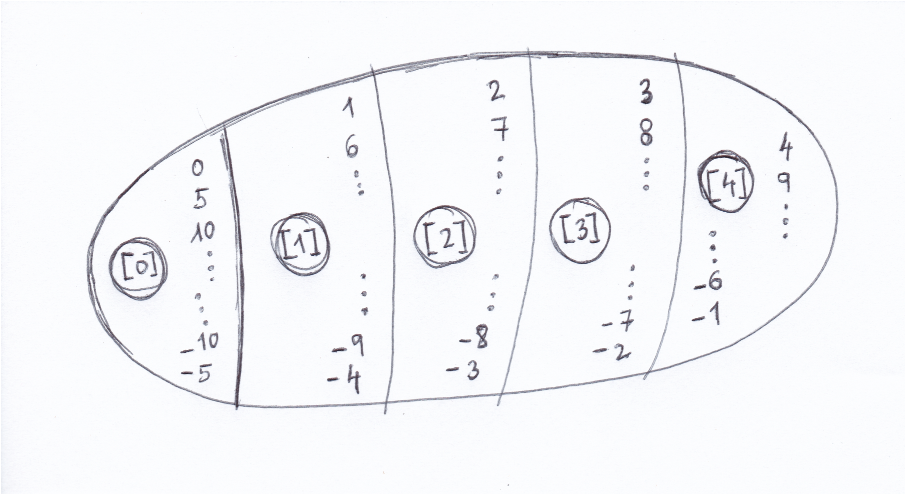
Než přikročíme k důležitému příkladu 7.6, definujeme na množině Z relaci kongruence:

- **Definice 37**: celá čísla a, b jsou kongruentní podle modulu n, pokud $n|(b-a)$;
- **Označení 32** vztahu z definice 37: $a \equiv b \pmod{n}$;

Příklad 7.6. Podle relace kongruence podle modulu 5 lze množinu celých čísel rozdělit do pěti podmnožin.

V této situaci lze nyní říci:

[30] Česky: rozkladová množina (ale vžil se anglický název, FACTOR (jako sloveso) znamená ROZLOŽIT).



Obrázek 5: Množina zbytkových tříd Z_5.

a) Označíme-li znakem E danou relaci kongruence, můžeme psát xEy, když x, y náleží do stejné podmnožiny rozkladu ... tato relace je relací ekvivalence na Z (je to relace reflexivní (např. $5 \equiv 5$), symetrická (např. $5 \equiv 10$ implikuje[31], že $10 \equiv 5$), tranzitivní ($5 \equiv 10, \quad 10 \equiv 30 \quad \Rightarrow 5 \equiv 30$).

b) Označíme-li tyto podmnožiny $M_0 := [0]$, $M_1 := [1]$, $M_2 := [2]$, $M_3 := [3]$, $M_4 := [4]$, tak systém podmnožin $\{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ tvoří rozklad množiny Z podle ekvivalence E.

c) Když se na M_i přestaneme dívat jako na množiny a začneme se na ně dívat jako na prvky, dostaneme pětiprvkovou množinu

$$Z/_E := \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\},$$

kde všechna čísla v každé množině M_i jsme ztotožnili v jedno a označili za jediný prvek. Je to faktorová množina (= rozkladová množina) množiny Z podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina. □

Relace E kongruence podle modulu 5 a k ní příslušná faktormnožina jsou důležitým příkladem „ze života“ = ze situací matematiky na SŠ i ZŠ: v jedné třídě ekvivalence E jsou právě ta celá čísla, které mají po vydělění pěti tentýž KLADNÝ zbytek VE SMYSLU VĚTY 12, neboli jejich obrazy na číselné ose jsou stejně vzdáleny směrem doprava od obrazu nejbližšího celočíselného násobku čísla 5.

7.2 Cvičení

Návrh cvičení 7:

- rozdání testíků; další příklady z kapitoly 6 budou v rámci domácího úkolu (přípravy na testík-b). Nyní se pustíme do kapitoly 7.

[31] Česky: z toho plyne, že ...

- Kolik existuje rozkladů množiny $\{a, b, c\}$ na podmnožiny? Nakreslete všechny tyto rozklady graficky na tabuli.
- Kolik existuje rozkladů množiny $\{a, b, c, d\}$ na podmnožiny? Nakreslete všechny tyto rozklady graficky na tabuli.
- Co je to vlastně rozklad?
- Nakreslete do obrázků některých rozkladů čtyřprvkové množiny relaci určenou těmito podmnožinami:

  $$\rho = \{[x, y] \in M \times M : \exists M_i \text{ taková, že } x \in M_i \ \wedge \ y \in M_i\}.$$

  Určete vlastnosti této relace ... R,S,T (tj relace ekvivalence).
- Na množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nakreslete podmnožiny $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{3, 6, 7, 8\}$, $M_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ ... pomocí soustavy šipek (orientovaného diskrétního grafu) znázorněte relaci určenou těmito podmnožinami ... a určete její vlastnosti ... tato relace není R,S,T ... jak je to možné?
- Shrnutí posledních dvou příkladů: relace určená systémem podmnožin je ekvivalence, jen když tento systém podmnožin množiny M je rozkladem množiny M.
- Na množině Z je definována relace $\equiv_6$ kongruence modulo 6 ... vypište několik vazeb z této relace ... jaké má tato relace vlastnosti? Někdo jiný: Nakreslete systém podmnožin množiny Z určený zadanou kongruencí (nemusíte v něm už dělat šipky jednotlivých vazeb): vytváříme tedy všechny možné (napiš na tabuli, ale spíše obecně se znakem ρ a **systém podmnožin určený ekvivalencí** ρ) podmnožiny

  $$M_i = \{x \in M : \exists y \in M : x\rho y\}.$$
- Shrnutí předchozího příkladu: rozklad množiny Z na systém podmnožin $\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ se nazývá faktor množina (rozkladová množina) určená ekvivalencí $\equiv_6$, označujeme

  $$Z/_{\equiv_6} := \{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}.$$
- na množině Q všech zlomků lze definovat relaci ρ takto:

  $$\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] \in \rho \text{ tehdy, když platí } ad = bc.$$

  Vypište si několik konkrétních vazeb v této relaci, a pak určete její vlastnosti. Jestliže se jedná o ekvivalenci, někdo další: nakreslete rozklad množiny Q na podmnožiny určený danou ekvivalencí (vlastně: nakreslete faktormnožinu $Q/_\rho$).
- Shrnutí předchozího příkladu: racionální číslo je vlastně jeden prvek vytvořené faktormnožiny: soubor všech možných zlomků, které mají stále stejnou hodnotu, definuje jedno racionální číslo.
- viz cvičení 7.3 níže
- viz cvičení 7.4 níže.

- Zbylá cvičení níže jsou za domácí úkol.

Cvičení 7.1. V relaci ekvivalence E jsou navzájem ty prvky z množiny $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, které dávají po vydělení číslem 4 stejný zbytek. Popište (nebo nakreslete) faktormnožinu $M/_E$ množiny M podle relace E.

Cvičení 7.2. Je zadán rozklad množiny M na podmnožiny $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{2, 4, 10\}$, $M_3 = \{6, 7, 8\}$,
$M_4 = \{9\}$. Popište (nebo nakreslete) relaci ekvivalence indukovanou (určenou) tímto rozkladem.

Cvičení 7.3. Na množině reálných čísel je definován rozklad na dvě podmnožiny: M_1 tvoří všechna kladná reálná čísla a nula; M_2 tvoří všechna záporná čísla. Definujte symbolickým zápisem (charakteristickou vlastností množiny) relaci ekvivalence určenou (indukovanou) tímto rozkladem.

Cvičení 7.4. Na množině $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{2}{1}, \frac{8}{4}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{6}\}$ definujte nějakou užitečnou (tu nejznámější či nejpřirozenější) relaci ekvivalence E (řekněte, kdy jsou dva prvky ve vztahu relačním) a nakreslete obrázek faktormnožiny podle této ekvivalence. Dokončete i zápis: $M/_\rho = \{\ldots\}$

Cvičení 7.5. Uveďte příklad ekvivalence ρ na množině reálných čísel, aby rozklad $R/_\rho$ této množiny určený ekvivalencí ρ měl dvě třídy.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.7.

8 Uspořádané množiny, maximální prvek, největší prvek, supremum

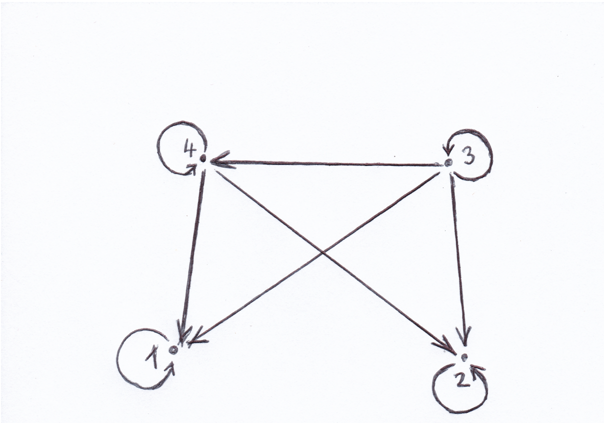
V tomto týdnu budeme procházet vlastnosti dalšího důležitého typu binární relace, a sice relace uspořádání.

8.1 Přednáška

V této přednášce se budeme zaobírat teoretickým zázemím pro dvě důležité struktury, které se objevují dokonce i na základní škole: struktura všech podmnožin dané množiny (s relací „být podmnožinou“) a množina přirozených čísel s relací dělitelnosti.

a) Pojem uspořádané množiny

Příklad 8.1. (ve trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace na obrázku[32] číslo 6?



Obrázek 6:

Relace podobného typu, jako je ta na obrázku, jsou v matematice natolik důležité, že mají své jméno a budeme se jim věnovat téměř dva týdny naší exkurze po základních pojmech matematiky. Kupodivu si lze položit otázku: co mají společného relace $\leq$ na množině racionálních čísel, relace $\subseteq$ (být podmnožinou) na množině všech podmnožin jisté množiny a relace dělitelnosti $|$ na množině všech přirozených čísel. Jedná se o tři různé vztahy mezi prvky různého charakteru, a přesto mají tyto tři základní relace v matematických přístupech na základní a střední škole něco společného, co je charakterizuje. A tak dříve než v navazujících semestrech se budeme věnovat tomu, co a jak učit na základní (a střední) škole v matematice, nyní v tomto vysokoškolském úvodu do studia matematiky, se chvíli podívejme na otázku, kterou by si položili studenti v kursu „matematika pro dospělé“: co mají relace „menší nebo rovno“, „je podmnožinou“ a „je dělitelem“ společného? Ukazuje se, že tyto celkem různorodé relace mají společné celkem tři vlastnosti: (11), anti-(12) a (13). Matematicky hloubavý člověk v této situaci zbystří, odstoupí od konkrétních středoškolských operací a studuje právě jen i obecné struktury,

[32] [14], str.24.

které splňují uvedené tři vlastnosti – tyto struktury se nazývají uspořádané množiny.

Definice 38: Binární relace na množině P, která je reflexivní (11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní (13), se nazývá uspořádání. Množina P, na které je definovaná relace uspořádání, se nazývá částečně uspořádaná množina – v textu [14][33] je označována poněkud nezvyklým termínem poset (z anglického Partially Ordered SET)[34].

Poznámka: obecné označení relace uspořádání.

Ikdyž relace uspořádání je blízká relaci $\leq$ (respektive $\leq$ je čtenáři známým příkladem uspořádání), budeme ji označovat (v souladu s textem [14]) obecnějším symbolem $\unlhd$, který zaručuje, že se ne vždy bude jednat o relaci zcela totožnou s klasickou relací $\leq$ na množině celých či reálných čísel. Obecnou uspořádanou množinu budeme tedy zapisovat zápisem $(P, \unlhd)$.

Poznámka: Hasseův diagram

Definice 39: Pro relaci uspořádání zavádíme kromě grafové reprezentace přehlednější strukturu, a sice tzv. Hasseův diagram, ve kterém

1. reflexivitu (= smyčky) nevyznačujeme, protože ji automaticky předpokládáme u všech prvků uspořádané množiny;
2. šipky odstraníme tak, že Hasseův diagram jednoznačně orientujeme zdola nahoru, a pak místo šipek spojujeme prvky neorientovanou úsečkou – jestliže prvek je spojen s jiným prvkem umístěným výše v diagramu, tak je s ním v relaci;
3. hranami vyznačíme jen bezprostředně následující prvky – ostatní šipky vyplývající z tranzitivity nevykreslujeme; pak pokud $x \unlhd y$, tak je mezi prvky x a y řetězec spojů mezi bezprostředními předchůdci a následovníky;
4. antisymetrie bude z nákresů patrna též – ta ovšem spočívá spíše v neexistenci oboustranných šipek mezi různými prvky (a právě díky neexistenci oboustranných šipek na stejné úrovni můžeme orientaci šipek z částečně uspořádané množiny odstranit – hrany v Hasseově diagramu tedy vždy směřují zdola nahoru, tj. dolní prvek hrany je prvním prvkem dané uspořádané dvojice).

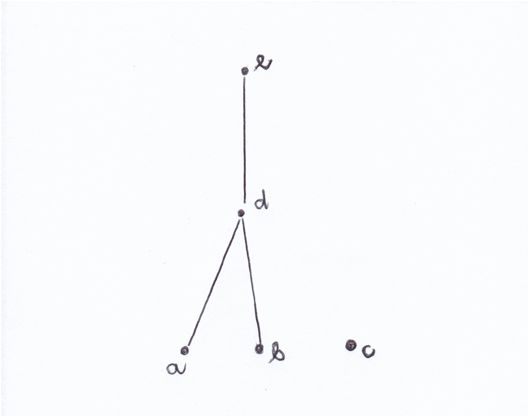
Příklad 8.2 – Hasseův diagram. Pro ilustraci je na obrázku 7 nakreslen Hasseův diagram pro pětiprvkovou množinu $P = \{a, b, c, d, e\}$ a relaci ρ na P definovanou výčtem uspořádaných dvojic:

$$\rho = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [e, e], [a, d], [d, e], [a, e], [b, d], [d, e], [b, e]\}.$$

Příklad 8.3 ilustrační – Hasseův diagram: Překreslete relaci uspořádání z úvodního příkladu této kapitoly (obr. 6) do Hasseova diagramu (zde není provedeno).

[33] Str.23, definice 1.6.

[34] Je to skutečně neobvyklý termín pro češtinu, až extrémní – ale navrhuji jej autorovi, panu Kopkovi, odpustit, určitě jej použil s dobrým záměrem, aby studenti a vyučující nemuseli stále vypisovat dlouhý termín **částečně uspořádaná množina**.



Obrázek 7: Hasseův diagram relace uspořádání.

Příklad 8.4. (úkol pro studenty) Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) tříprvkových posetů[35].

Označení 33: Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, označme symbolem $\trianglelefteq$ relaci uspořádání (reflexivní, antisymetrická, tranzitivní) a symbolem $\lhd$ relaci ostré uspořádání na množině P, pokud $\lhd$ je antireflexivní (anti-11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní (13) (ostré uspořádání je tedy uspořádání zbavené reflexivity, nemůže nastat $x \lhd x$ pro žádný prvek x).

Označení 34: Symbolem $\prec$ budeme označovat relaci bezprostředího předchůdce v množině P, když $\forall x, y \in P$:

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad (x \lhd y \wedge \nexists\, a \in P : x \lhd a \lhd y)$$

(jinými slovy, mezi x, y už nelze vložit další prvek a různý od y). Říkáme, že prvek x bezprostředně předchází prvku y (nebo že prvek y bezprostředně následuje za prvkem x)[36].

Označení 35: Symbolem $\trianglerighteq$ označujeme relaci inverzní k relaci $\trianglelefteq$, symbolem $\rhd$ relaci inverzní k $\lhd$.

B) Význačné prvky posetu:

Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, $M \neq \emptyset$ je podmnožina množiny P, tak prvek $a \in M$ nazveme

a) (**definice 40**) nejmenší prvek množiny M, když

$$\forall x \in M : \quad a \trianglelefteq x;$$

b) (**definice 41**) minimální prvek množiny M, když

$$\nexists\, x \in M : \quad x \lhd a;$$

[35] Jedno prvkový poset je až na přeznačení jeden, dvouprvkové posety jsou dva.

[36] Pomocí ostrého uspořádání $\lhd$ a relace bezprostředního předchůdce $\prec$ lze lépe popsat konstrukci Hasseových diagramů: vyznačujeme v nich hranami pouze relaci bezprostředního předchůdce ([14], str.30, lemma 4). Pro konečný poset $(P, \trianglelefteq)$ a jeho prvky $a, b \in P$ tedy platí: $a \lhd b$ (ostře menší než) znamená, že v množině P existuje řetězec bezprostředních následovníků $a = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n = b$.

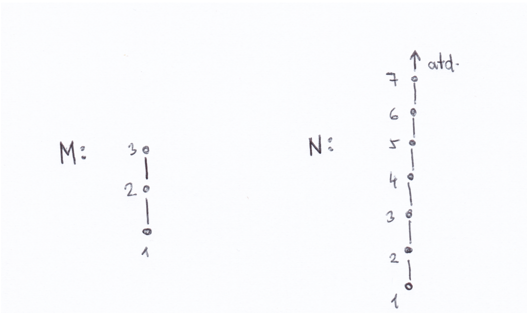
c) (**definice 42**) největší prvek množiny M, když

$$\forall x \in M: \quad a \trianglerighteq x;$$

d) (**definice 43**) maximální prvek množiny M, když

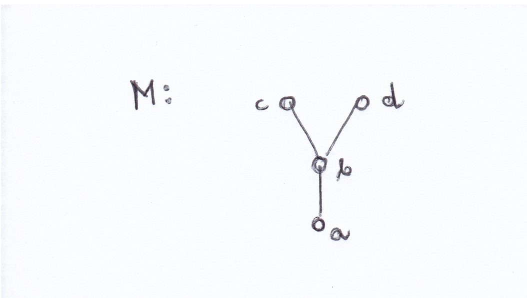
$$\nexists\, x \in M: \quad x \triangleright a.$$

Příklad 8.5 ilustrační. Ad obrázek 8: V tříprvkové množině M s uspořádáním zadaným v Hasseově diagramu je 1 prvek minimální a nejmenší současně, a dále 3 je prvek maximální a největší současně. V množině N s klasickým uspořádáním $\leq$ je nejmenší prvek 1 a číslo 1 je též minimální prvek. Největší prvek množiny N neexistuje.



Obrázek 8: Dva příklady posetu.

Dále na obrázku 9 je množina M, ve které a je minimální i nejmenší prvek současně. Na druhé straně, největší prvek tato množina nemá – má pouze dva maximální prvky c, d.



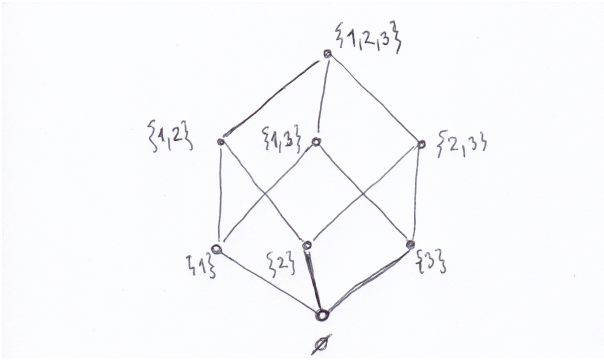
Obrázek 9: Rozdíl mezi maximálním a největším prvkem.

Tj. maximální prvek množiny M je takový, „nad kterým" už není v této množině žádný prvek. Na druhé straně největší prvek musí být srovnatelný (= v relaci) se všemi prvky množiny M a musí být větší nebo roven než libovolný z nich. $\star$

Označení 36: Symbol 2^A označuje množinu všech podmnožin množiny A. Například množina $A = \{1, 2, 3\}$ má osm podmnožin: prázdnou množinu, tři jednoprvkové podmnožiny, tři dvouprvkové podmnožiny a osmou podmnožinou je množina A samotná. Označení má svou logiku: pokud A má n prvků, jejích všech možných podmnožin je 2^n.

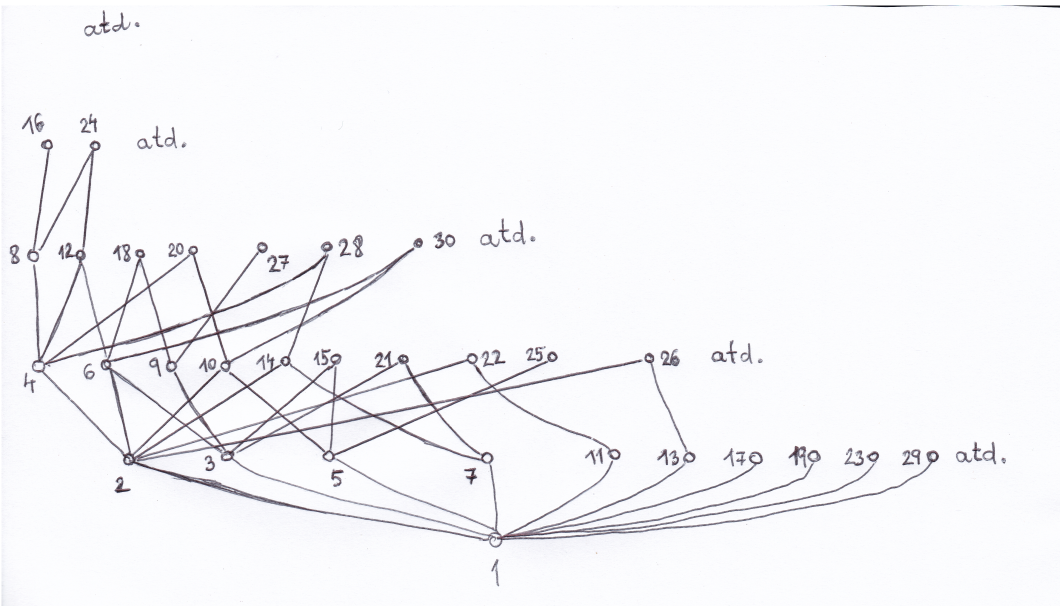
Příklad 8.6. Dva důležité příklady posetů.

a) Relace $\subseteq$ na množině 2^P všech možných podmnožin množiny $P = \{1, 2, 3\}$ je poset, jeho Hasseův diagram je na obrázku 10:



Obrázek 10: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1, 2, 3\}$.

b) Na množině N definujme uspořádání pomocí dělitelnosti, tj. $a \trianglelefteq b \Leftrightarrow a|b$. Pak $(N, \trianglelefteq)$ je poset, který má nekonečně mnoho prvků. Na obrázku 11 je nakreslena jen jeho dolní část:



Obrázek 11: Poset $(N, |)$.

Ze struktury dělitelů vidíme, že např. číslo 24 má dělitele 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 a 24).

Příklad 8.7 – úkol pro studenty. Nakreslete Hasseovský diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 60 vzhledem k relaci $|$.

Podívejme se nyní na další význačné prvky v posetech:

Když $(P, \trianglelefteq)$ je poset a M je nějaká neprázdná podmnožina množiny P, nazýváme prvek $a \in P$ (pokud takový prvek existuje):

- (**definice 44**) dolní závora množiny M, pokud $a \trianglelefteq x \;\; \forall x \in M$;
- (**definice 45**) infimum množiny M (označujeme $\inf M$), pokud je největším prvkem na množině všech dolních závor množiny M; tj. a je infimum, pokud pro všechny další dolní závory d platí
$$d \trianglelefteq x \;\; \forall x \in M \Rightarrow d \trianglelefteq a;$$
- (**definice 46**) horní závora množiny M, pokud $a \trianglerighteq x \;\; \forall x \in M$;
- (**definice 47**) supremum množiny M (označujeme $\sup M$), pokud je nejmenším prvkem na množině všech horních závor množiny M. Tj. a je supremum, pokud pro všechny další holní závory h platí
$$h \trianglerighteq x \;\; \forall x \in M \Rightarrow h \trianglerighteq a;$$

Nejdůležitějším postřehem k předchozím definicím je asi to, že závory nebo infima-suprema množiny M nemusí samy být prvky množiny M!! Obecně závora, infimum či supremum je prvek množiny P, který může a nemusí ležet v dané množině M.

Příklad 8.8 ilustrační.

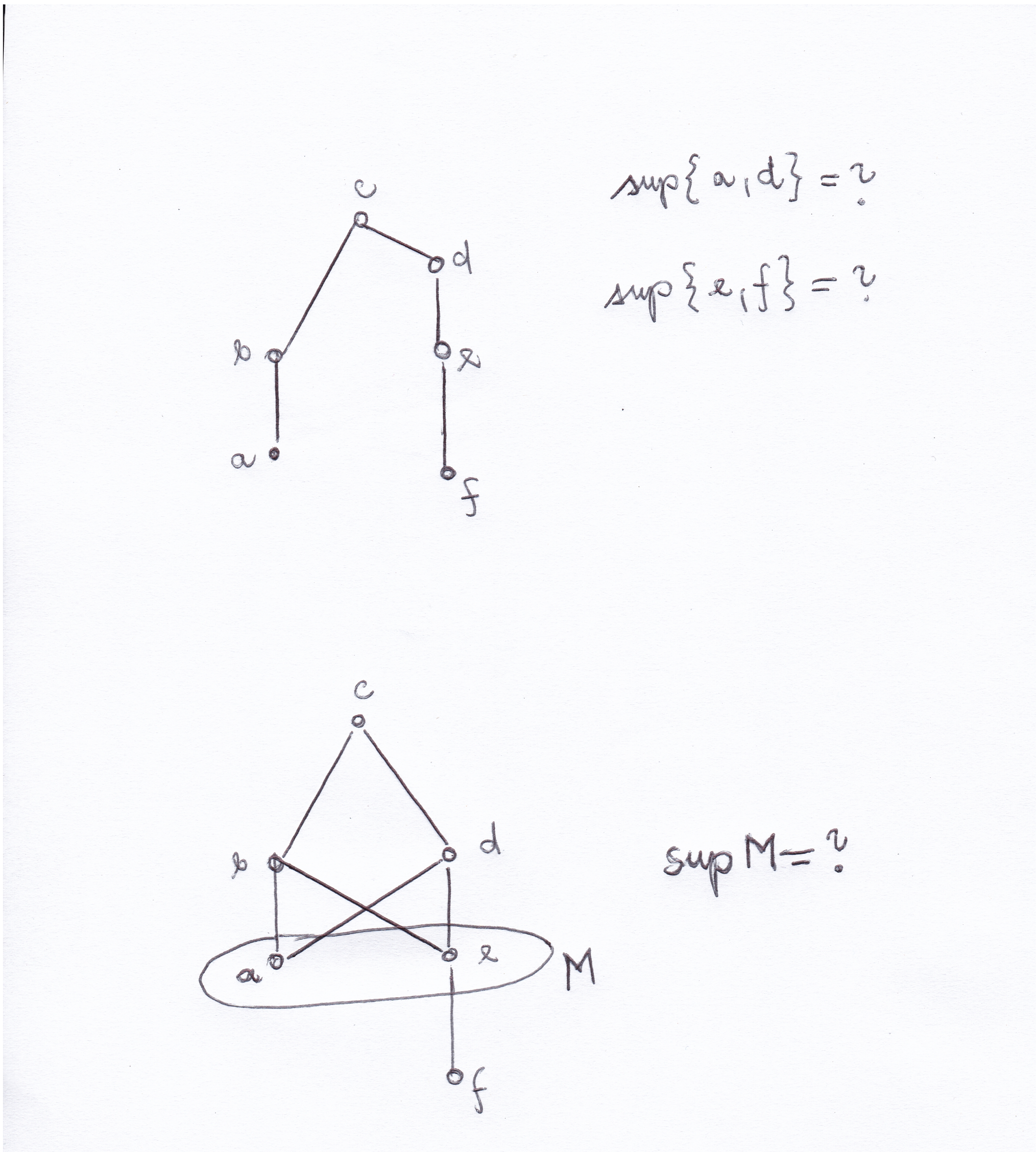
a) Například v posetu přirozených čísel s uspořádáním zadaným dělitelností těchto čísel (obr. 11) uvažujme množinu $M = \{12, 8, 20\}$. Dolní závorou množiny M jsou čísla 1, 2, 4 (společní dělitelé prvků v množině M), a tedy infimem je číslo 4 jako největší z těchto prvků (tj. infimem v $(N, |)$ je největší společný dělitel prvků v množině M.

Analogicky horní závorou množiny M jsou společné násobky čísel 12, 8, 20, tj. čísla 120, 240, 360, atd., a tedy supremem je nejmenší horní závora, tedy číslo 120.

b) V posetu podmnožin tříprvkové množiny (obr. 10) například platí
$$\inf\{\{1,2\},\{1,3\}\} = \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\},$$
$$\inf\{\{1,2\},\{2\},\{2,3\}\} = \{2\},$$
tedy infimem několika prvků je jejich vzájemný průnik,
$$\sup\{\{1,2\},\{1\}\} = \{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2\}$$
(supremem několika množin v dané struktuře je jejich sjednocení).

Příklad 8.9. úkol pro studenty Najděte suprema množin na obrázku 12, pokud existují (studenti sami).

Pokud už zhruba známe pojmy infima a suprema podmnožiny M posetu P, budiž řečeno, že **definice 48**) svaz je takový poset, v němž pro každou dvouprvkovou



Obrázek 12: Příklad suprem dvouprvkových podmnožin posetu.

podmnožinu $\{x, y\}$ existuje její supremum i infimum.

Označení „svaz“ je trefné: každé dva prvky x, y svazu jsou v příslušném Hasseově diagramu „svázány“ zdola infimem a shora supremem. Ve smyslu tohoto pojmu jsou oba významné posety z příkladu 8.8 svazy – konstrukce infim a suprem je popsána v příkladu 8.8.

8.2 Cvičení

Přehled cvičení osmého:

- Kontrola úkolu z přednášky, i když ještě pojmy suprema a infima nebyly zopakovány: nakreslete Hasseho diagram všech přirozených dělitelů čísla 60 uspořádaných podle relace „je dělitelem". Vybereme nějakou tříprvkovou podmnožinu M a pokusíme se od studentů vyzvědět, jaké je její supremum a infimum (pojmy ještě budou probrány později, ale nyní jen upozorníme na skutečnost, že $sup(M)$ je nejmenším společným násobkem všech prvků v M, $inf(M)$ je největší společný dělitel všech prvků v M).

- Kontrola úkolu z přednášky, i když ještě pojmy suprema a infima nebyly zopakovány: nakreslete Hasseho diagram všech podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4\}$uspořádaných podle relace „je podmnožinou". Vybereme dvě nesrovnatelné podmnožiny do množiny M, jaké je její supremum a infimum? Pojmy ještě budou probrány později, nyní jen upozorníme na skutečnost, že $sup(M)$ vznikne sjednocením všech podmnožin v M, $inf(M)$ vznikne průnikem všech podmnožin v M ... tyto dva školy tedy slouží jako motivace pojmů, které budou v dnešním cvičení následovat.

- Nyní po motivaci vše popořadě: Jaké vlastnosti má relace dělitelnosti na N? Právě takové, že pro ni lze nakreslit Hasseho diagram. Jak v Hasseho diagramu realizujeme reflexivitu? Jak antisymetrii? (orientací všech vazeb jedním směrem, a sice zdola nahoru) Jak tranzitivitu? (ta vyplývá z cesty zdola nahoru vytvořené z vazeb mezi bezprostředními předchůdci a následníky).

- Cvičení 8.12 .... jaké má daná relace vlastnosti? jestliže R, AS, T, tak lze pro ni vytvořit Hasseho diagram – pokuste se o to. Toto cvičení motivuje název relace uspořádání: Prvky lze USPOŘÁDAT do Hasseho diagramu.

- Naopak cvičení 8.1, a nebo jen pro relaci na $\{a, b, c, d\}$ zadanou pomocí „písmene Y postaveného na hlavu": Vypište relaci ρ zadanou tímto Hasseho diagramem ... nesmíme zapomenout na to, že máme „vyčíst" z Hasseho diagramu i vztahy reflexivní i vztahy tranzitivní. Tj. studenti musí být z Hasseho diagramu schopni vyčíst celou relaci, jak jsme ji zadávali či vypisovali v předchozích dvou týdnech.

- K tabuli jdou čtyři studenti současně, měli by každý napsat definici: a),b) $a \in M$ je minimální-nejmenší prvek množiny M, c),d) $b \in M$ je maximální-největší prvek množiny M, jestliže ...

  Komentář k definicím: definice maximálního-minimálního prvku z přednášky jsou řečeny pouze formou $\nexists \ldots$, přeformulujme je nějak pozitivně: u minimálního prvku a platí
  $$\forall x \in M - \{a\} : x \not< a,$$
  u maximálního prvku b platí
  $$\forall x \in M - \{b\} : x \not> b$$
  (omlouvám se, ale nemohu v Tex najít symbol $\lhd$, $\rhd$, který lze dobře přeškrtnout ... tedy použil jsem symbol přeškrtnutého běžného znaménka, i když se jedná o obecnou relaci uspořádání).

- Studenti musí vědět, co to jsou nesrovnatelné prvky (cvičení 8.8).

- Cvičení 8.6, 8.7 ... trocha práce s maximálními a minimálními prvky.

- K tabuli jdou čtyři studenti současně, měli by každý napsat definici: a) $d \in P$ je dolní závora množiny M, jestliže ... b) $a \in P$ je infimum množiny M, jestliže ... c) $h \in P$ je horní závora množiny M, jestliže ... d) $b \in P$ je supremum množiny M, jestliže ...

  Lze tolerovat i definici infima

  $$a = nejv(D(M)),\ \text{kde}\ D(M) = \{d : \forall x \in M : d \trianglelefteq x\},$$

  a podobně i definici suprema

  $$b = nejm(H(M)),\ \text{kde}\ H(M) = \{h : \forall x \in M : x \trianglelefteq h\}.$$

- Nyní nastává tedy důkladné procvičení těchto čtyř pojmů, k tabuli jdou další čtyři studenti, nakreslí každý Hasseho diagram množiny P a v něm označí bublinou množinu $M \subseteq P$, aby a) $sup(M) \in M$, b) $sup(M) \notin M$, c) $sup(M)$ neex. a současně $H(M) = \emptyset$, d) $sup(M)$ neex. a současně $H(M) \neq \emptyset$.

- Totéž pro infimum: k tabuli jdou další čtyři studenti, nakreslí každý Hasseho diagram množiny P a v něm označí bublinou množinu $M \subseteq P$, aby a) $inf(M) \in M$, b) $inf(M) \notin M$, c) $inf(M)$ neex. a současně $D(M) = \emptyset$, d) $inf(M)$ neex. a současně $D(M) \neq \emptyset$. Tato a předchozí odrážka má upozornit na skutečnost, že horní-dolní závory mohou a nemusí existovat, a také mohou a nemusí být obsaženy v samotné množině M, kterou „zavírají“.

- Závěrečné cvičení se týká cvičení 8.5, ale z pěti uvedených množin (viz obrázek na konci textu ke cvičení 8.5) vyučující nakreslí na tabuli jen tři obrázky, M_1, M_3, M_5, každou na jinou část tabule ... množiny jsou v bublinách, to, co je přesahuje, jsou nějaké další prvky množiny P. A nyní je úkolem tří studentů, kteří jdou k tabuli, vypsat všech osm následujících charakteristik: a) $nejv(M) = \dots$, b) $Max(M) = \dots$, c) $nejm(M) = \dots$, d) $Min(M) = \dots$, e) $D(M) = \dots$, f) $inf(M) = \dots$, g) $H(M) = \dots$, h) $sup(M) = \dots$.

  Studenti si jdou sednout, kontrola jednotlivých položek a vysvětlení, kde udělali chybu.

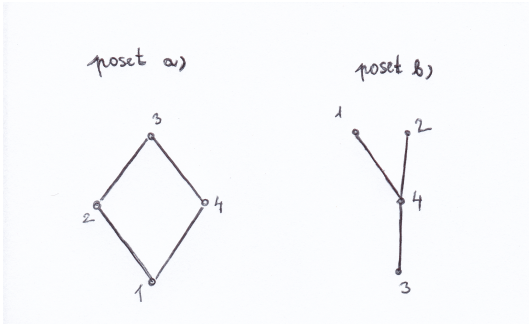
- To je vše, na některých cvičeních se stihlo i cvičení 8.4, ale na jiných ne a zůstává za domácí úkol, jako i další cvičení, co se nestihla ... výsledky téměř všech těchto cvičení jsou na konci textu.

Cvičení 8.1.

- i) Vypište podle Hasseova diagramu relaci $\trianglelefteq$ výčtem uspořádaných dvojic na obrázku 13: a) poset (a); b) poset (b)[37];

- ii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\triangleleft$ ostrého uspořádání;

- iii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\prec$ bezprostředního předchůdce.



Obrázek 13: Uspořádané množiny (a) a (b).

Cvičení 8.2. Nakreslete Hasseův diagram posetu 2^P pro $P = \{1, 2, 3, 4\}$ – pro zjednodušení k uzlům diagramu nevpisujte závorky a čárky, tj. množiny budou označeny jen znaky prvků: např $\emptyset$, 12, 124 jsou označení různých množin. $\star$

Cvičení 8.3. Nakreslete Hasseův diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 144 vzhledem k relaci dělitelnosti beze zbytku.

Cvičení 8.4. Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) čtyřprvkových posetů.

Cvičení 8.5. Jaký je rozdíl mezi minimálním prvkem, nejmenším prvkem a infimem množiny M?

Cvičení 8.6. Uveďte příklad pětiprvkového posetu, který má právě dva prvky maximální a právě tři prvky minimální.

Cvičení 8.7. Nalezněte poset, který má právě jeden maximální prvek, ale nemá největší prvek.

Cvičení 8.8. Uveďte příklad posetu, který obsahuje nějaké dva nesrovnatelné prvky – uveďte, které to jsou.

Cvičení 8.9. Uveďte příklad pětiprvkového posetu, ve kterém současně platí všechny následující podmínky:

a) v Hasseově diagramu jsou znázorněny minimálně čtyři hrany.

b) Platí $a \leq b$ a současně $b \leq c$.

c) Každý prvek je srovnatelný aspoň s jedním dalším prvkem.

d) Existují v něm tři prvky, které jsou navzájem mezi sebou nesrovnatelné.

[37] [14], str.28, obrázky 5a,5b.

Cvičení 8.10.

a) uveďte definici největšího prvku: x_0 z posetu $(P, \leq)$ je největší prvek množiny $M \subseteq P$, když ...
(pokračujte zkráceným matematický zápisem);

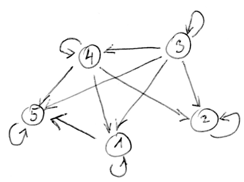
b) negujte předchozí definici, tj.: x_0 z posetu $(P, \leq)$ není největší prvek množiny $M \subseteq P$, když ...
(pokračujte zkráceným matematický zápisem – nestačí přitom položit znak negace před část a), proveďte tuto negaci podrobněji);

Cvičení 8.11.

a) Vysvětlete, co je to Hasseův diagram (jak je v něm zachycen vztah $[x, y]$ relace? jaké relace pomocí Hasseova diagramu popisujeme?) a jak jsou v něm zachyceny vlastnosti (11), anti-(12) a (13).

b) Nakreslete Hasseův diagram množiny všech kladných dělitelů čísla 72 uspořádané vzhledem k relaci | (= je dělitelem).

Cvičení 8.12. Relace je zadána grafovou reprezentací (viz obrázek 14). Zjistěte, zda se jedná o uspořádání, a pokud ano, překreslete tuto relaci do Hasseova diagramu. Pokud ne, uveďte, která vlastnost uspořádání není splněna.



Obrázek 14: Ke cvičení 8.12: Relace zadaná grafovou reprezentací.

Cvičení 8.13.

a) Na posetu $(P, \trianglelefteq)$ uvažujme neprázdnou podmnožinu M. Číslo m je infimum množiny M v tomto posetu, když ... dokončete definici:

b) Na posetu $(N, |)$ přirozených čísel uspořádaných podle relace „dělí běze zbytku“, máme podmnožinu $M = \{8, 12, 30\}$. Nalezněte inf$M$ a sup$M$.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.8.

9 Zobrazení, posloupnost, funkce, operace

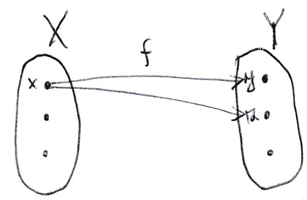
Už čtvrtou přednášku se zabýváme pojmem relace, a tento oddíl tomu bude nejinak – podíváme se na definici jedné z relací, která je v matematice klíčová, a to je zobrazení[38], a budeme studovat některé vlastnosti tohoto pojmu. Přednáška 9 se odehraje víceméně podle následujícího textu.

9.1 Přednáška

Definice 49: Relace f na kartézském součinu $X \times Y$ se nazývá zobrazení z množiny X do množiny Y, jestliže pro ni platí podmínka

$$\forall x \in X,\ y, z \in Y: \quad [x, y] \in f \ \wedge \ [x, z] \in f \ \Rightarrow \ y = z$$

(tj. v grafové reprezentaci zobrazení nemohou z prvku x vycházet orientované hrany do dvou různých prvků y, z množiny Y). Na obrázku 15 je znázorněn příklad relace, která není zobrazením.



Obrázek 15: Příklad relace f, která není zobrazením.

Ekvivalentní definice zobrazení: Relace f na kartézském součinu $X \times Y$ se nazývá zobrazení z množiny X do množiny Y, jestliže pro ni platí podmínka

$$\forall x \in X,\ y, z \in Y: \quad [x, y] \in f \ \wedge \ y \neq z \ \Rightarrow \ [x; z] \notin f$$

(jestliže prvek x je v relaci s prvkem y, pak už nemůže být v relaci s žádným dalším prvkem z).

Dále definujeme (**definice 50**) definiční obor zobrazení f jako množinu $D(f)$ těch prvků z X, které jsou v relaci f s některým z prvků množiny Y, neboli ve stručném matematickém zápisu

$$D(f) = \{x \in X: \ \exists y \in Y \ : \ [x, y] \in f\}$$

a (**definice 51**) obor hodnot zobrazení f jako množinu $Im(f)$ těch prvků z Y, se kterými je v relaci f aspoň jeden prvek množiny X, neboli

$$H(f) = \{y \in Y: \ \exists x \in X \ : \ [x, y] \in f\}.$$

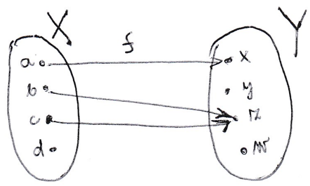
[38] V této kapitole bude využit výklad z knihy [8], kapitola 6.

Poznámka: ekvivalentní zápis zobrazení prvků. Pokud je f zobrazení z X do Y, tak pro $[x, y] \in f$ můžeme vzhledem k jednoznačnosti prvku y psát $y = f(x)$ (a číst: prvek $y \in Y$ je obrazem prvku $x \in X$ vzhledem k zobrazení f; dále prvek x se nazývá vzorem prvku y vzhledem k zobrazení f) a v této symbolice zapisovat veškeré vlastnosti týkající se zobrazení f, tj. také i pojmy definičního oboru a oboru hodnot zobrazení f:

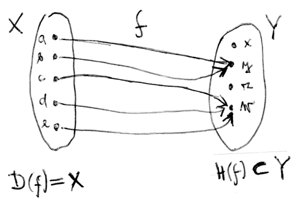
$$D(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ : \ y = f(x)\}$$
$$H(f) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ : \ y = f(x)\}.$$

Definice 52: Podle toho, jakou část množiny X zabírá $D(f)$, jakou část množiny Y zabírá $H(f)$a zda je zobrazení f prosté nebo ne (tato vlastnost bude hned vysvětlena), rozeznáváme šest typů zobrazení:

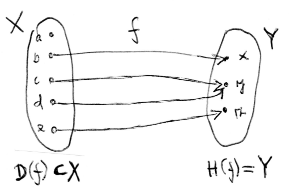
a) zobrazení z X do Y, pokud $D(f)$ je vlastní podmnožina množiny X, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y; příklad viz obrázek (přitom $D(f) = \{a, b, c\}$ a $H(f) = \{x, z\}$):



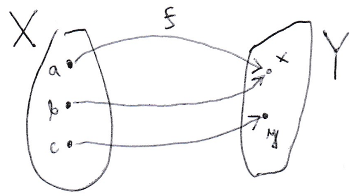
b) zobrazení X do Y, pokud $D(f) = X$, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y; příklad viz obrázek (toto zobrazení typu b), tj. zobrazení X do Y, má speciální označení – (**označení 37**) $f : X \to Y$)



c) zobrazení z X na Y, pokud $D(f)$ je vlastní podmnožina množiny X, $H(f) = Y$; příklad viz obrázek:



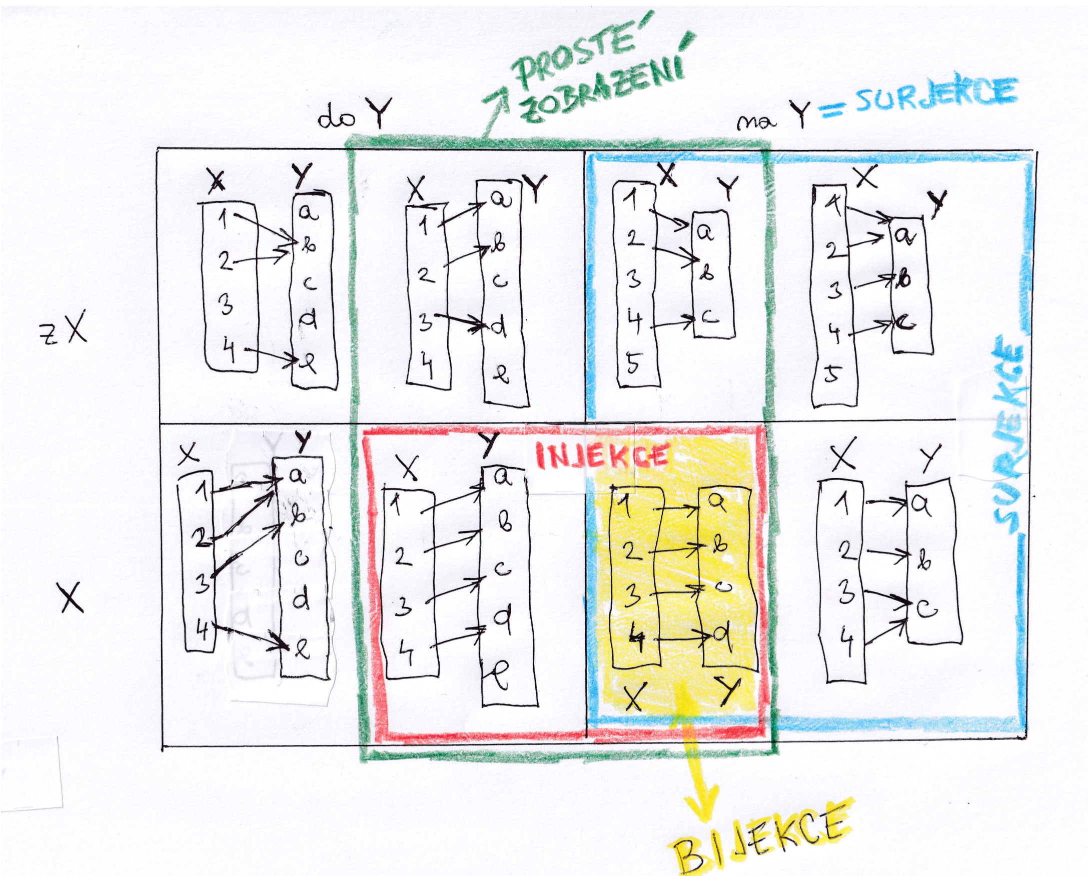
d) zobrazení X na Y, pokud $D(f) = X$, $H(f) = Y$; příklad viz obrázek:



e) prosté zobrazení mezi množinami X a Y (v daném pořadí), pokud platí podmínka prostého zobrazení (e):

$$\forall x, y \in D(f) : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Prosté zobrazení může být tedy zobrazením všech čtyř předchozích typů a,b,c,d, jen navíc platí podmínka, že různé vzory z definičního oboru se zobrazí na různé obrazy (viz obrázek, všechny čtyři typy zobrazení v zelené oblasti):



f) injekce, pokud platí dvě věci: jednak $D(f) = X$ (zobrazení je typu (b)); a druhak platí podmínka injektivity (f):

$$\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

(jediný rozdíl v definici vlastnosti e) a vlastnosti (f) je v tom, že vlastnost (e) je řečena $\forall x, y \in D(f)$, kdežto vlastnost (f) je řečena $\forall x, y \in X$, tj. u injekce „jednoznačně vnořujeme“ nikoli jen $D(f)$, ale celou množinu X do druhé množiny). Příklady injekce vidíte na předchozím obrázku v červeném rámečku.[39]

g) surjekce neboli zobrazení na Y, pokud je splněna jediná věc, a sice $Hf = Y$. Surjekce je tedy zobrazení typu c) nebo d).

h) bijekce neboli prosté zobrazení X na Y, pokud je surjekce a současně injekce.[40] Příklad viz žlutě vyznačený typ zobrazení na předchozím obrázku.

O zobrazení bijektivním lze říci, že se jedná o vzájemně jednoznačné přiřazení prvků celé množiny na celou množinu. Inverzní zobrazení k bijektivnímu zobrazení je také bijektivní, tj. bijekce je v jistém smyslu „obousměrná“ (v tom smyslu, že inverzní zobrazení k bijekci je také bijekce).

Věta 16. Podmínce prostého zobrazení(= podmínce injektivity) je logicky ekvivalentní podmínka

$$\forall x, y \in X: \; f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$$

(neboli pokud se dva obrazy rovnají, tj. $f(x) = f(y)$, tak se musí jednat o tentýž vzor, tj. $x = y$).

Důkaz: Plyne z platnosti vět v kapitole 1 tohoto textu: dokazovaná vlastnost je logicky ekvivalentní obměně implikace z vlastnosti prostého zobrazení (52e). □

Kromě jednoho zobrazování či zobrazení lze studovat-popisovat ty situace, kdy skládáme dvě různá zobrazení, tj. nejprve zobrazujeme prvky z X do Y, a pak z Y do Z:

Definice 53: Pokud $f : X \to Y$ je zobrazení a $g : Y \to Z$ je zobrazení, definujeme složené zobrazení $g \circ f$ (**označení 38**) množiny X do množiny Z takto:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

(čti „g po f“ – toto čtení také umožňuje zapamatovat si pořadí, v jakém zobrazování provádíme: nejprve na prvek x použijeme zobrazení f, a pak teprve zobrazení g)

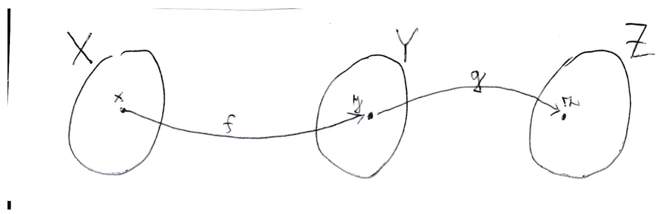
Příklad 9.1. Vezměme $X = Y = Z$ množinu reálných čísel a zobrazení $f : R \to R$ definované předpisem $f(x) = 2x$, podobně $g : R \to R$ definované $g(x) = x + 5$. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je definované vztahem

$$g(f(x)) = g(2x) = 2x + 5,$$

jedná se tedy opět o zobrazení $R \to R$.

[39] Podle předchozích vlastností můžeme říci: Injekce je prosté zobrazení X do Y nebo prosté zobrazení X na Y. Tj. injekce je typ (e,b,c) nebo typ (e,b,d) v řeči označení vlastností malými písmeny.

[40] V řeči našeho označení pomocí malých písmen je bijekce zobrazením typu (e,b,d).



Obrázek 16: Příklad složeného zobrazení $g \circ f$.

Pozor ovšem, záleží na pořadí skládání – při opačném pořadí skládaných funkcí dostaneme

$$f(g(x)) = f(x+5) = 2(x+5) = 2x + 10.$$

Poznámka: Iverzní relace f^{-1} někdy není zobrazením.

Inverzní relaci f^{-1} netřeba zvlášť definovat, protože je to relace, v jejíž grafové reprezentaci všechny šipky změní směr na opačný vzhledem k f (a v množinové reprezentaci všechny uspořádané dvojice změní pořadí svých souřadnic). Problém je ten, že inverzní relace f^{-1} není vždy zobrazením: Uvažujme zobrazení $f : R \to R$ dané vztahem pro druhou mocninu $f(x) = x^2$. Pak např. $f(2) = 4$ a $f(-2) = 4$, tj platí $[4; 2] \in f^{-1}$ a $[4; -2] \in f^{-1}$, tj. f^{-1} není zobrazení.

Věta 17. Inverzní relace f^{-1} z Y do X je zobrazením z Y do X právě tehdy, když zobrazení $f : X \to Y$ je injekce.

Důkaz: Dokažme (typ 4) obě implikace této ekvivalence.

- Dk. implikace „⇒“:dokažme

  $$f^{-1} \text{ je zobrazení } \Rightarrow \quad f : X \to Y \text{ je injekce.}$$

  Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

  $$f^{-1} \text{ je zobrazení } \wedge \quad f : X \to Y \text{ není injekce.}$$

  Pak existují prvky $x, y \in X$, $x \neq y$ tak, že $f(x) = z = f(y)$ pro nějaké $z \in Y$. To by ale znamenalo, že $[z, x] \in f^{-1}$, $[z, y] \in f^{-1}$, a to je spor s tím, že f^{-1} je zobrazení. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace.

- Dk. implikace „⇐“:dokažme

  $$f : X \to Y \text{ je injekce } \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je zobrazení .}$$

  Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

  $$f : X \to Y \text{ je injekce } \wedge \quad f^{-1} \text{ není zobrazení .}$$

  Pak existují prvky $x_1, x_2 \in X$ a $z \in Y$, $x_1 \neq x_2$ tak, že $[z, x_1] \in f^{-1}$ a $[z, x_2] \in f^{-1}$. To by ale znamenalo, že $f(x_1) = z$, $f(x_2) = z$, a to je spor s tím, že f je injekce. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace. □

Příklad 9.2. Například zobrazení $f : R \to R$ zadané vztahem $f(x) = 2x$ je prosté (injektivní), a tedy k němu existuje zobrazení inverzní $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ (tedy předpis zobrazení představujícího násobení dvěma je inverzní k předpisu zobrazení představujícího dělení dvěma).

And last but not least, nyní jsme schopni si říci vysokoškolskou definici operace: (**definice 54**): Binární operace $\heartsuit$ na množině M je zobrazení $M \times M \to M$, tj. zobrazení, které přiřadí uspořádané dvojici $[a; b]$ z kartézského součinu $M \times M$ výsledek této operace, prvek $a \heartsuit b$.

Příkladem operací, které lze dosadit za symbol $\heartsuit$, je celá řada: $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\cap$, $\cup$, atd. Jejich podrobnějšímu studiu se budeme věnovat ve druhém semestru studia.

Definice 55: Zobrazení $f : N \to R$ (tedy $D(f)$ je množina přirozených čísel, $H(f)$ je množina reálných čísel) se nazývá posloupnost reálných čísel.

Například posloupnost někdy zapisujeme ve tvaru

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

a to znamená, že přirozené číslo 1 se zobrazilo na reálné číslo označené a_1, přirozené číslo 2 se zobrazilo na reálné číslo označené a_2, atd.

Definice 56: Zobrazení f z množiny reálných čísel R do množiny reálných čísel R se nazývá (reálná) funkce (jedné) reálné proměnné.

9.2 Cvičení

Návrh devátého cvičení:

- Tři velmi důležité definice, které studenti musejí znát: Definice posloupnosti, definice reálné funkce, definice binární operace ... ať studenti definici vymyslí a uvedou příklad.

- Vraťme se k definici zobrazení, základnímu pojmu této hodiny: dva (či tři) tvary definice z přednášky.

- Definice a) až f) různých typů zobrazení ... vyučující vyzví definice od studentů (od čtyř až šesti studentů).

- Titíž čtyři až šest studentů jsou k tabuli nakreslit pro definici, kterou uvedli, typický příklad.

- Všichni v lavici nyní vymýšlejí reálné funkce, které jsou jednoho z šesti předchozích typů (a) až (f) ... u každého typu uveďte jinou funkci jako příklad (většinou studenti vykřiknou z lavice, vyučující nakreslí na tabuli skicu grafu dané funkce, aby jejich tvrzení potvrdil).

- Jakého typu (z předchozích šesti typů) je funkce $y = 2^x$ a funkce $y = \log_2 x$?

- cvičení 9.4 a 9.5 ... studenti přijdou k tabuli vyřešit;
- správné sestavení složeného zobrazení ... cvičení 9.6 a 9.7.
- Příklad s nekonečno množinou: Definujte pomocí obrázku zobrazení $f: N \to N$, které je a) injekce, ale ne surjekce; b) surjekce, ale ne injekce; c) je bijekce.
- Zbytek cvičení otázky od studentů, nebo příklady na opakování, protože bude testík. Ze souboru druha.tretina v IS může být na tesítku-b vše kromě příkladů očíslovaných 5b).

Cvičení 9.1. Úvodní cvičení k pojmu zobrazení už bylo v kapitole 6, cvičení 6.2. Nyní se věnujme už pojmu **funkce a její graf**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, **pdf hodina 2105 pro studenty** – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 9.2. Funkce a její graf 2: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2106 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 9.3. Prostá funkce: Spojení definice (52e) a (56) této kapitoly: Prostá funkce je prosté zobrazení $R \to R$. Příklady viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2107 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele. Tato úvodní tři cvičení 9.1, 9.2, 9.3 dobře prezentují pojem funkce, kreslení grafu funkce a určování $D(f)$, $H(f)$.

Cvičení 9.4. Nakreslete příklad zobrazení $f: X \to Y$, které je injekce, ale není surjekce.

Cvičení 9.5. Nakreslete příklad zobrazení $f: X \to Y$, které je surjekce, ale není injekce.

Cvičení 9.6.

a) Uveďte definici složení dvou zobrazení f, g.

b) $f(x) = \sin x$, a dále $g(x) = \sqrt{x}$ jsou reálné funkce; zadejte vzorcem zobrazení $g \circ f$.

Cvičení 9.7.

a) Co je to zobrazení? Uveďte definici.

b) Jsou zadány reálné funkce $f(x) = 2^x$, $g(x) = (x+1)^2$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Sestavte složenou funkci $h \circ g \circ f$ proměnné x.

Cvičení 9.8.

a) Nakreslete tři příklady zobrazení (pokud možno tvořivě, zobrazení různých typů) a u každého příkladu si bokem vypište, jakého z šesti typů zobrazení z definice 52 se týká (jedno zobrazení může být někdy současně zobrazením více typů).

b) Vyměňte si sešity ve dvojicích či trojicích a napište tužkou ke každému zobrazení v sešitě svého souseda jeho typ či typy. Pak si své výsledky zkontrolujte společně.

Cvičení 9.9. Nakreslete příklad zobrazení $f : Z \to N$, které je injektivní, ale ne surjektivní.

Cvičení 9.10. Nakreslete příklad zobrazení $f : R \to Z$, které je surjektivní, ale ne injektivní.

Cvičení 9.11. Nakreslete příklad zobrazení $f : N \to Z$, které je bijektivní.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.9.

10 Elementární funkce – úvod

10.1 Přednáška: vlastnosti funkce – shrnutí

Tato kapitola byla nově přesunuta jako přednáška 10 a shrnuje základní pojmy u elementárních funkcí, které budou procvičovány a používány v týdnech 10 až 13.

Přednáška 10 je zkrácená díky testíku, ale je v ní započata právě následující kapitola s přehledem vlastností funkce – tyto vlastnosti budou dokončeny na přednášce 11. Nástin:

- Funkce je zobrazení R do R nebo R na R ... definice. $Df = \ldots$, $Hf = \ldots$.
- **Definice 57:** Grafem funkce $f(x)$ budeme rozumět množinu

  $$\mathrm{Gr}(f) := \{[x;y] \in R \times R : x \in Df \wedge y \in Hf \wedge f(x) = y\}.$$

  Protože zobrazení je jistá relace, f a $\mathrm{Gr}(f)$ je vlastně totéž. Mohli bychom též chápat, že $f(x)$ je vzorec a množina bodů $\mathrm{Gr}(f)$ je relace určená tímto vzorcem
- Důležité je, že označení $[x;y] \in f$ nebo $x \overset{f}{\mapsto} y$ nebo $f(x) = y$ je stále totéž a znamená, že **funkce f nabývá v bodě x hodnotu y.**
- Dále definice, které se stihnou, vždy příslušná definice a k ní obrázek.

Reálná funkce jedné reálné proměnné byla definována v definici 56. Ale jedná se o pojem natolik důležitý, že ve zbylých čtyřech týdnech si zopakujeme nejdůležitější příklady funkcí, které se používají v mnoha oborech. Na zopakované znalosti těchto základních = elementárních funkcí bude pak navazovat výuka předmětu Matematická analýza 1 – objektem této analýzy bude právě pojem funkce.

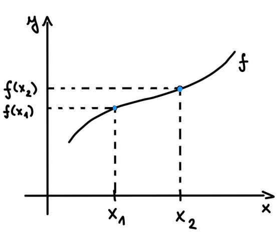
Definice vlastností funkce

V dalším se zaměříme na přesnější vyjádření vlastností reálných funkcí. Studenti budou muset znát definice následujících vlastností, a také vědět, jak se daná vlastnost pozná z grafu funkce $f(x)$. **Nově důležité: u zkoušky bude za 15 bodů zkoušena jedna z vlastností funkce, za 7,5 bodu bude uvedení definice, za dalších 7,5 bodu nakreslení obrázku k dané definici**.

Říkáme, že (**definice 58**)

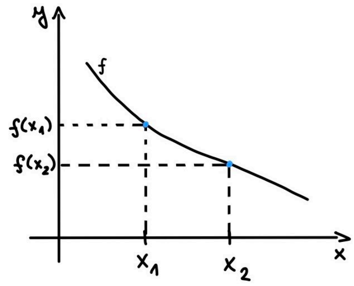
1. funkce f je rostoucí na intevalu I, když

   $$\forall x_1, x_2 \in I: \;\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2);$$



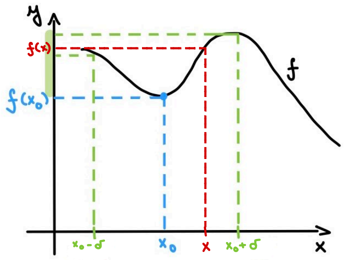
2. funkce f je klesající na intevalu I, když[41]

$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2);$$



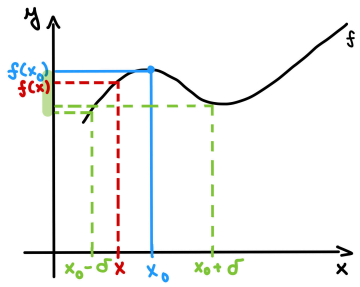
3. x_0 z $D(f)$ je lokální minimum funkce f, když existuje otevřený interval $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ obsahující x_0 a platí

$$\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta): \quad f(x) \geq f(x_0);$$



4. x_0 z $D(f)$ je lokální maximum funkce f, když existuje otevřený interval $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ obsahující x_0 a platí

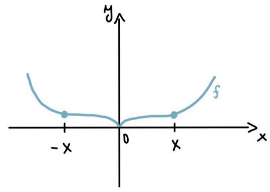
$$\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta): \quad f(x) \leq f(x_0);$$



[41] Studenti si musí dát pozor, aby se nestali tzv. obraceči v negativním smyslu slova, že bez přemýšlení obrátí obě nerovnosti v definici rostoucí funkce – tímto způsobem totiž nedostanou definici funkce klesající, ale zase jen funkce rostoucí, s tím rozdílem, že se na graf funkce dívají zprava, z druhé strany!!!!!! Ve správné definici klesající funkce je na rozdíl od definice funkce rostoucí převrácen jen jeden symbol nerovnosti!! Část $x < y$ je stále stejná – stále chceme popisovat tu situaci, že první dosazovaná hodnota je menší než ta druhá, tj. obraz čísla x na reálné ose je stále nalevo od obrazu čísla y.

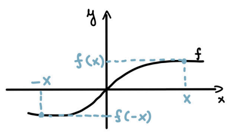
5. funkce f je <u>sudá</u> na svém definičním oboru, když

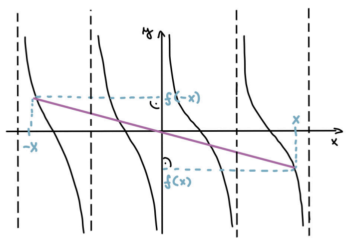
$$\forall x \in D(f): \ (-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) = f(x);$$



6. funkce f je <u>lichá</u> na svém definičním oboru, když

$$\forall x \in D(f): \ (-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) = -f(x);$$

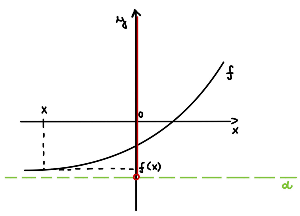




7. funkce f <u>není ani sudá, ani lichá</u> na svém definičním oboru, když pro ni neplatí předchozí dvě definice.

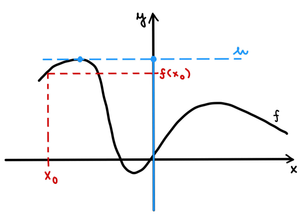
8. funkce f je <u>zdola ohraničená</u> na svém oboru hodnot $H(f)$, když

$$\exists d \in R: \forall x \in D(f): \quad d \leq f(x);$$

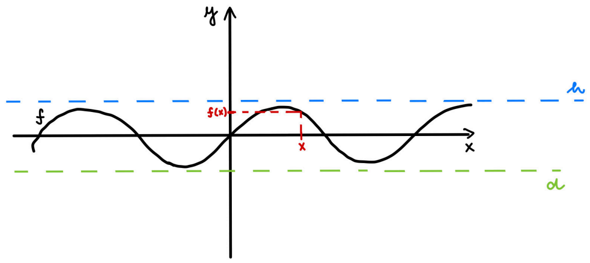


9. funkce f je <u>shora ohraničená</u> na svém oboru hodnot $H(f)$, když

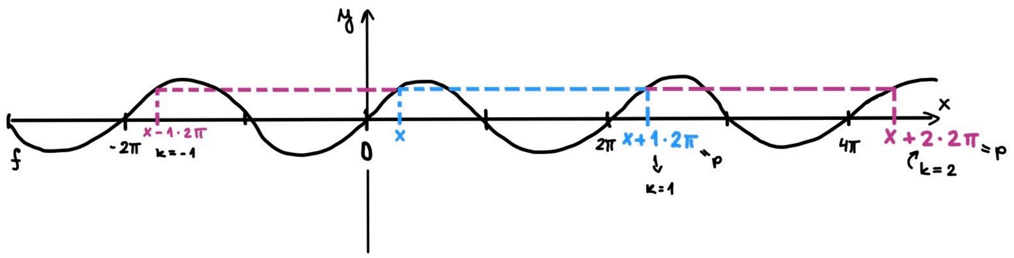
$$\exists h \in R: \forall x \in D(f): \quad f(x) \leq h;$$



10. funkce f je ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když je ohraničená shora i zdola, tj. když
$$\exists d, h \in R : \forall x \in D(f) : \quad d \leq f(x) \leq h;$$



11. funkce f je periodická, když
$$\exists p \in R : p > 0 \ \wedge \ \forall x \in D(f) : \quad (x + kp \in D(f) \ \forall k \in Z \quad \wedge \quad f(x) = f(x + kp)).$$



Budeme se učit poznávat uvedené vlastnosti (včetně těch, které byly definovány v kapitole 9, jako je $D(f)$, $H(f)$, rozeznání, zda je funkce prostá = injektivní, a následné sestavení inverzní funkce) na základě grafu funkce.

Určení některých vlastností z grafu funkce:

1. Definiční obor poznáme z grafu funkce takto: kolmice z bodů grafu na vodorovnou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $D(f)$.

2. Obor funkčních hodnot: kolmice z bodů grafu na svislou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $H(f)$.

3. Lokální minimum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že
$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je klesající na } \langle a; x_0\rangle \ \wedge f \text{ je rostoucí na } \langle x_0; b\rangle;$$

4. Lokální maximum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že
$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je rostoucí na } (a; x_0\rangle \ \wedge f \text{ je klesající na } \langle x_0; b);$$

5. Sudou funkci poznáme tak, že její graf je osově souměrný vzhledem ke svislé ose soustavy souřadnic (osa y je osa souměrnosti).

6. Lichou funkci poznáme tak, že její graf je středově souměrný vzhledem k průsečíku souřadných os (bod $[0;0]$ je střed souměrnosti).

7. Funkci, která není ani sudá, ani lichá, poznáme tak, že její graf není ani osově souměrný vzhledem ke svislé ose, ani středově souměrný vzhledem k počátku soustavy souřadnic[42].

8. Funkci ohraničenou zdola poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = K$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$.

9. Funkci ohraničenou shora poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = L$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý pod přímkou $y = L$.

10. Funkci ohraničenou zdola i shora poznáme tak, že existují konstantní funkce $y = K$ a $y = L$ rovnoběžné s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$ a pod přímkou $y = L$.

11. To, že funkce f je prostá (injektivní), poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy nejvýše v jednom bodě.

12. To, že funkce f je surjektivní, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x vždy protnou její graf v nějakém bodě (aspoň jednom).

13. To, že funkce f je bijekce R na R, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy právě v jednom bodě.

14. Pokud je naším úkolem nakreslit funkci inverzní f^{-1} k funkci f, tak můžeme využít faktu, že grafy funkcí f a f^{-1} jsou osově souměrné vzhledem ke grafu lineární funkce $y = x$[43].

15. To, že funkce je periodická, poznáme z jejího grafu tak, že část grafu odpovídající délce nejmenší periody na vodorovné ose se opakuje v tom smyslu, že rovnoběžky s osou x protínají graf funkce v nekonečně mnoha bodech, jejichž vzájemná vzdálenost je rovna násobku této nejmenší periody.

[42] Aby to funkci ani sudé, ani liché nebylo líto, tak pokud je její definiční obor středově symetrický vzhledem k počátku a funkce je dostatečně slušná, tedy například spojitá, lze ji vyjádřit jako součet dvou (spojitých!) funkcí, z nichž jedna je sudá a druhá lichá – tedy z každé spojité funkce na vhodném definičním oboru lze separovat dvě hodnoty, z nichž jedna přispívá do sudosti a druhá do lichosti. Tato separace funkce na sudou a lichou část ovšem nepatří do základních dovedností, jimiž se budeme zabývat.

[43] To plyne mimo jiné z toho faktu, že při hledání inverzní funkce zaměňujeme x za y ve funkčním předpisu $y = f(x)$ a vyjadřujeme proměnnou x jako funkci proměnné y, a tedy oba grafy jsou „zaměnitelné“ = osově symetrické vzhledem k této „ose zaměnitelnosti“ $y = x$.

přehled úkolů pro rozbor funkce $f(x)$:

a) Určete $D(f)$ a průsečíky grafu funkce s osou x.

b) Určete $H(f)$ a průsečíky grafu funkce s osou y.

c) Určete intervaly, na kterých je funkce rostoucí (klesající), nalezněte její lokální extrémy.

d) Určete, zda je funkce sudá, lichá, nebo není ani sudá, ani lichá.

e) Určete zda je funkce ohraničená (zdola nebo shora).

f) Určete, zda je funkce prostá – pokud ano, tak vyjádřete funkcí k ní inverzní.

g) Určete, zda je funkce periodická – pokud ano, najděte délku její nejmenší periody.

h) Nakreslete graf funkce f.

10.2 Vlastnosti funkce – opakování k ústní zkoušce

Cvičení 10.1. Dokončete definice nebo jejich negace bez jediného českého slova, jen pomocí matematických symbolů (u negací nejprve vytvořte příslušnou pozitivní definici, a teprve pak symbolický zápis negujte):

a) Relace f je zobrazení z X do Y, když ...

b) Relace f není zobrazení z X do Y, když ...

c) Funkce f je rostoucí na intervalu I, když ...

d) Funkce f není rostoucí na intervalu I, když ...

e) Funkce f je klesající na intervalu I, když ...

f) Funkce f není klesající na intervalu I, když ...

g) Reálné číslo x_0 je lokální minimum funkce f, když ...

h) Reálné číslo x_0 není lokální minimum funkce f, když ...

i) Reálné číslo x_0 je lokální maximum funkce f, když ...

j) Reálné číslo x_0 není lokální maximum funkce f, když ...

k) Funkce f je sudá, když ...

l) Funkce f není sudá, když ...

m) Funkce f je lichá, když ...

n) Funkce f není lichá, když ...

o) Funkce f je shora ohraničená, když ...

p) Funkce f není shora ohraničená, když ...

Cvičení 10.2. Uveďte příklad vzorce (nikoli jen obrázku) reálné funkce, která je sudá.

Cvičení 10.3. Uveďte příklad vzorce (nikoli jen obrázku) reálné funkce, která je lichá.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.10.1.

10.3 Cvičení: Funkce lineární, funkce s absolutní hodnotou, funkce kvadratická

První cvičení na funkce bude provedeno jinak než podle učebnice realisticky.cz, zde je návrh cvičení 10 nově: V týdnech 10 až 13 se na cvičení budeme zabývat elementárními funkcemi a zjišťování-popisu jejich vlastností. Přehled úkolů při popisu funkce je uveden na konci přednášky 10, tj. na str. 78 nahoře. Na tomto cvičení se budeme věnovat pouze úkolům 1, 2, 3 a 8 funkcí typu A) lineární funkce, B) funkce s absolutní hodnotou, C) kvadratické funkce.

- A) Funkce lineární jsou funkce typu $y = a \cdot x + b$, kde $a, b \in R$ jsou konstanty a x, y jsou první a druhá souřadnice vazeb určených daným vzorcem.

- Nakreslete graf funkce $y = 2x + 3$ ... jaký je geometrický význam čísel 2 a 3? ... (v odpovědi zmiňme i trojúhelník o délce základny 1 jednotka, který je pravoúhlý a z něhož plyne: pokud zvýšíme číslo x o jednu jednotku, zvýší se hodnota y o 2 jednotky).

- „Inverzní“ dovednost: Je dána přímka procházející číslem 1 na ose x a číslem -2 na ose y. Najděte vzorec funkce, jíž je tato přímka grafem.

- Tatáž dovednost: Přímka prochází body [1; 0,5] a [2; 0]. Najděte vzorec funkce, jíž je tato přímka grafem. Lze dvěma metodami: dosazením dvou bodů do obecné rovnice v našem modelu, nebo odhadem z jednotkového pravoúhlého trojúhelníčku o délce základny 1 jednotka.

- Existuje nějaká přímka v rovině, kterou nelze popsat jako graf funkce lineární $y = ax + b$? ... důležitá zmínka

- Vsuvka o významu Df, Hf: Petáková str. 24, příklad 11a). Tři studenti jsou k tabuli, z nakresleného grafu mají jen napsat Df, Hf ... letos v každém cvičení některý z trojice chyba ... jedná se o základní dovednost, jako zmáčknutí spojky u rozjetí auta.

- Podobně tentýž příklad 11b): význam označení $f(x) = y$ Máme najít x_1, x_2, x_3, aby $f(x_1) = 0{,}5$, $f(x_2) = 2$, $f(x_3) = -3$ ... ještě lze doplnit výpočtem $f(2) = \ldots$, $f(3) = \ldots$.

- B) funkce $f(x) = |x|$, respektive funkce typu $f(x) = a \cdot |x + b| + c$, kde $a = \pm 1$, $b, c \in R$ jsou konstanty. První úkol: pouze statická dovednost (dosazování konkrétního x a výpočet y zakreslení bodů do roviny a proložení křivkou), nakreslete graf, určete Df, Hf pro $f(x) = |x|$.

- Dále dynamická dovednost (snažíme se pouze zjistit, kam se posunul vrchol základního grafu $y = |x|$, zbytek grafu dynamicky dokreslíme, bez dosazování bodů x): tři studenti jdou k tabuli, nakreslete graf, určete Df, Hf pro a) $f(x) = |x+1|$, b) $f(x) = |x| + 1$, c) $f(x) = -|x-2| - 1$ ... úkolu (c) lze napomoci rozdělením na tři fáze představující tři posuny: nejprve nakreslete relaci $y = |x-2|$, pak relaci $y = -|x-2|$, a pak relaci $y = -|x-2| - 1$ ... jedná se o složení dvou posunutí a jedné osové souměrnosti!!

- Pokročilý příklad na závěr: Nakreslíme graf funkce $y = ||x| - 1|$, z toho část „pod“ osou x čárkovaně, abychom naznačili, že část pod osou se ve výsledky osově souměrně zobrazila ... studenti by měli přijít na vzorec sami. To z absolutních hodnot stačí, jádrem cvičení jsou totiž kvadratické funkce.

- C) funkce kvadratická $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro $a \neq 0$: nejprve statická dovednost, studenti dosazují body x a počítají hodnoty y: Student jde k tabuli nakreslit sám čtyři funkce do jednoho grafu: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$, $f_3(x) = -x^2$, $f_4(x) = \frac{-1}{4} \cdot x^2$.

- Dynamická dovednost: všímáme si jen, zda koeficient u x je kladný nebo záporný, a pak zjistíme, kam se posunul vrchol $[0; 0]$ základního tvaru funkce z předchozího příkladu – to nám stačí na nakreslení grafu, určení Df, Hf a zjištění, na kterých intervalech je funkce f rostoucí (klesající). Poznámka k rostoucnosti a klesajícnosti: I když v tomto skriptu používám definici funkce rostoucí na intervalu do nějž lze zahrnout i pravý či levý krajní bod, vedu studenty k tomu, aby popisovali monotonii jen na otevřeném intervalu, protože pravděpodobně na přednášce (Matematická analýza 1) budou definovat monotonii na intervalu pomocí monotonie v bodě, a tak nebudou krajní body zahrnovat.

- Tak tedy příklad: Nakreslete graf, určete Df, Hf a intervaly monotonie funkce $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ... doplněním výrazu na úplný čtverec zjistíme souřadnice vrcholu.

- Nakreslete graf, určete Df, Hf a intervaly monotonie funkce $f(x) = -x^2 - 6x - 8$ ... doplnění na čtverec provádíme až po vytknutí minus z celého trojčlenu.

- Dva studenti jdou k tabuli ... totéž pro funkce $f(x) = x^2 + 5x - 1$, $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 2$. ... stále platí: vytkněte koeficient u x^2 z celého trojčlenu, a pak až upravujte na čtverec. Zde řešení těchto příkladů jsem už posílal emailem.

- A konečně inverzní úloha: vrchol paraboly je $[2; -1]$ a je otočená nahoru: nalezněte vzorec kvadratické funkce, jíž je parabola grafem ... tato funkce není určena jednoznačně, například je řešením $y = (x-2)^2 - 1$.

- A ještě jedna: vrchol paraboly je $[-3; -2]$ a je otočená dolů: nalezněte vzorec kvadratické funkce, jíž je parabola grafem ... tato funkce není určena jednoznačně, například je řešením $y = -(x+3)^2 - 2$.

- Na závěr cvičení nebo začátkem cvičení následujícího: Souřadnici vrcholu paraboly lze určit i z první derivace funkce f, lze získat vzorec $x_0 = \frac{-b}{2a}$ a souřadnici y_0 dopočítat ze vzorce funkce: $f(x_0) = y_0$.

A) Lineární funkce $f(x) = a \cdot x + b$

Opakování tohoto typu viz cvičení, nebo využijte online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce:

- Lineární funkce I. pdf hodina 2108 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele. Model plnění vody přehrady při povodních roku 2002. K modelování této reálné situace kupodivu je dostatečný i nejjednodušší typ funkce, a to právě funkce lineární.
- Lineární funkce II. pdf hodina 2109 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele. Ještě k modelu plnění přehrady vodou. Ve druhé části cvičení se studenti učí kreslit grafy lineárních funkcí na základě předpisu (vzorce). Tato dovednost bude dále procvičena na cvičení.

B) Funkce s absolutními hodnotami

Musíme též zopakovat pojem absolutní hodnoty, aspoň na středoškolské úrovni. Poslouží nám k tomu opět středoškolské materiály [18] – matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, některé pdf hodiny, které snad není nutné přepisovat do tohoto textu:

- Funkce absolutní hodnota pdf hodina 2401 pro studenty – definice absolutní hodnoty; geometrický význam absolutní hodnoty rozdílu reálných čísel; graf funkce absolutní hodnota.
- Kreslení grafu funkce metodou napodobení výpočtu. pdf hodina 2402 pro studenty – kreslení grafů funkcí, které vzniknou modifikací nebo složením lineárních funkcí a funkce absolutní hodnoty. Tato dovednost bude dále procvičena na cvičení.

C) Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je reálná funkce typu $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálné konstanty a x je reálná proměnná. Podrobnější probrání kvadratických funkcí viz [9], str. 56-71. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9], některé příklady jsou řešené v jejím textu, u většiny neřešených příkladů je uveden výsledek na konci knihy [9]):

- grafy kvadratických funkcí (paraboly):
  - str. 61 ... graf funkce $y = a \cdot x^2$ pro různé hodnoty konstanty a;
  - str. 64 ... graf funkce $y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$;
  - příklad 4.9 na str. 67;
- řešení kvadratických nerovnic:
  - str. 69, př. 1: řešte v R:

$$2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1;$$

– příklad 4.23 na str. 71.

Cvičení 10.4. Nakreslete graf funkce $y = -2x^2 + 3x + 1$ a určete Dy a Hy.

Cvičení 10.5. Napište vzorec kvadratické funkce, pro kterou platí: $Df = R$, $Hf = (-\infty, 2\rangle$, vrchol nastává pro $x = 3$. Můžete nakreslit i její graf, ale vzorec je klíčový.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.10.2.

11 Výpočet a graf funkce inverzní, lineárně lomená funkce, mocninná a odmocninná funkce

11.1 Přednáška: Vlastnosti funkce II, výpočet a graf funkce inverzní

V této kapitole pokračujeme v přehledu základních typů funkcí využívaných v mnoha oborech lidské činnosti a praxe. Plán přednášky:

- První polovina: vrátíme se ještě k jedenácti pojmům-vlastnostem funkce v definici 58 a ke každé vlastnosti si nakreslíme obrázek (není ve skriptech, I am sorry, ale kdybyste někdo nakreslil hezkých jedenáct obrázků, tak je do skript naskenuji). U zkoušky pak bude jedna otázka na pojem-pojmy, a sice 7,5 bodu za správnou definici algebraicky (= symbolickým zápisem), 7,5 bodu za správný obrázek, na kterém tento pojem vysvětlíte.
- Druhá polovina: musíme se zabývat výpočtem a vlastnostmi inverzní funkce u různých základních typů funkcí, které probíráme. Zhruba podle klíče:
  - Už bylo řečeno v kapitole 9, že pokud f je funkce prostá, tak f^{-1} je též funkcí jedné reálné proměnné.
  - Pokud tedy relace f^{-1} je funkcí, právě díky inverznímu charakteru dochází k „přehození“ definičního oboru a oboru hodnot: $Df^{-1} = Hf$, $Hf^{-1} = Df$.
  - jestliže f je klesající, tak také f^{-1} je klesající ... to je dobrá pomůcka pro ověření správnosti grafu inverzní funkce.
  - pomůcka pro kreslení grafu funkce f a f^{-1}: oba grafy jsou osově souměrné množiny bodů v rovině vzhledem k ose ...
  - Výpočet inverzní funkce a nakreslení grafu f^{-1} ... u lineárních funkcí (typ A): $f(x) = 3x - 2$
  - Základní algoritmus výpočtu f^{-1} je u všech typů funkce stejný: 1) zaměníme x za y ve vzorci $y = f(x)$, 2) vyjádříme ze vzorce opět y, jak jsme zvyklí.
  - Výpočet inverzní funkce a nakreslení grafu f^{-1} ... u funkcí typu B ... to dělat nebudeme.
  - Výpočet inverzní funkce a nakreslení grafu f^{-1} ... u kvadratických funkcí (typ C) ... lze s omezením Df jen na tu část, kdy f je prostá. Máme dvě možnosti, jak se omezit, tj. dvě možné inverzní funkce, každou k jiné vstupní prosté funkci f.
  - Výpočet inverzní funkce a nakreslení grafu f^{-1} ... u lineárně lomených funkcí (typ D). Něco málo lze říci o lineárně lomené funkci samotné, ale to také ještě projdeme na cvičení, tj. jen zběžně, a zaměříme se na tu inverzi.
  - Typ E ... lze takový příklad vybrat, pokud stihneme. Nebo viz cvičení.
  - Typ F ... viz příští týden.
  - Typ G ... viz za čtrnáct dní.

11.2 Cvičení: Lineárně lomená funkce, mocninná a odmocninná funkce; výpočet funkce inverzní

Nástin cvičení:

- ad C) ke kvadratické funkci: souřadnice vrcholu lze zjistit ještě jiným způsobem, a sice teorie derivace poskytuje vzorec $x_0 = \frac{-b}{2a}$, souřadnici y_0 vypočteme ... ze vzorce funkce f.
- typ D) lineárně lomená funkce: jeden student nakreslí do jednoho grafu funkce $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{x}$, $f_3(x) = \frac{-1}{x}$, $f_4(x) = \frac{-2}{x}$. Statická dovednost ... dosazuje konkrétní bod x a vypočte konkrétní hodnotu y ... čtyři grafy, čtyřmi různými barvami!
- Další student: úkoly 1,2,3,8 pro funkci $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.
- Další student: úkoly 1,2,3,8 pro funkci $f(x) = \frac{-4x+1}{2x-1}$.
- Další student: úkoly 1,2,3,8 pro funkci $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$, navíc úkol nakreslit graf a vyjádřit vzorcem inverzní funkci f^{-1}.
- Ještě jeden úkolek navíc k předchozímu grafu: nakreslete graf funkce $f(x) = |\frac{3-x}{x+2}|$.
- Ale důležitější než předchozí příklad je inverzní úkol: při zadaném grafu rovnoosé hyperboly s posunutým středem do bodu $[2; -1]$, s grafem nakresleným v posunutém druhém a čtvrtém kvadrantu, navrhněte vzorec funkce, které je grafem.
- typ E, mocninná funkce: jeden student do jednoho obrázku dvěma barvami $y = x^4$, $y = x^6$ (statická dovednost, dosazuje různé body), druhý student do dalšího obrázku dvěma barvami $y = x^3$, $y = x^5$ (statická dovednost, dosazuje různé body) ... ať je mezi body určitě 0, $\frac{1}{2}$, 1.
- Někdo další: vezměte si další barvu a nakreslete k funkci $y = x^3$ do jednoho obrázku graf funkce f^{-1}, a také vyjádřete vzorcem.
- Jeden student do jednoho obrázku dvěma barvami $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$ (statická dovednost, dosazuje různé body), druhý student do dalšího obrázku dvěma barvami $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$ (statická dovednost, dosazuje různé body) ... ať je mezi body určitě 0, $\frac{1}{2}$, 1.
- Dva lidi k tabuli: Nakreslete do jednoho obrázku graf funkce (nyní i pro kreslení funkce f se jedná o dynamickou dovednost: jen zjistěte, do kterého bodu se posunul „střed obrázku funkce v základní poloze“, a zbytek dokreslete podle tohoto posunu, základní polohy viz dva příklady zpět): a) $f(x) = (x-2)^{-3}+3$; b) $f(x) = (x+1)^{-2}-3$.
- Další dva lidi: nakreslete i vypočtěte funkci inverzní ke dvěma předchozím příkladům, tj. ad a) na celém Df, ad b) na zúženém $Df = (-\infty; -1)$.
- Naopak jsou zadány grafy a) podobný předchozímu a), ale počátek posunuté soustavy souřadnic je v bodě $[3; -2]$ a $Hf = (-3; \infty)$, vaším úkolem je najít vzorec funkce, jíž je grafem; b) počátek posunuté soustavy souřadnic je v bodě $[3; -2]$ a $Hf = R - \{3\}$ a graf je nakreslen ve druhém a čtvrtém posunutém kvadrantu ... najděte vzorec funkce, jíž je grafem.

D) Lineárně lomená funkce

Jedná se o funkci typu

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

tj. funkci, kterou vytváříme pomocí podílu dvou lineárních funkcí (proto tedy název „lineárně lomená“ funkce). Podrobnější výklad viz [9], str. 72-84. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

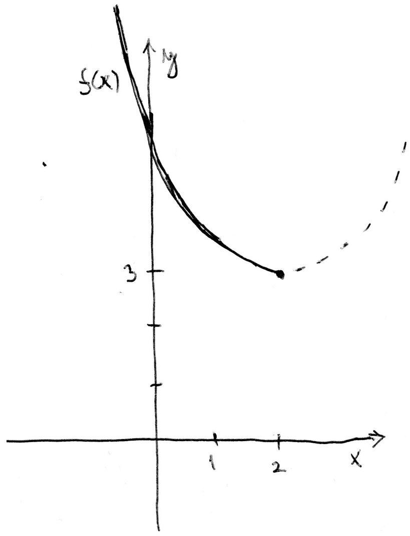
- str. 77 ... graf funkce $y = \frac{k}{x}$ pro různé hodnoty konstanty k;
- str. 78-80 ... obecnější grafy lineárně lomených funkcí – příklady 1 a 2;
- str. 82, příklad 5.9 ... grafy dalších typů, je důležité všechny nakreslit;

E) Mocninné funkce $f(x) = x^n$ a funkce k nim inverzní

Podrobněji viz [9], str. 85-116. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- Kreslení grafů mocninné funkce:
  - str. 87 ... grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in N$;
  - str. 90 ... grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in Z^-$;
  - str. 91, příklad 6.7;
- Hledání inverzní funkce:
  - str. 95, př. 1: Nalezněte funkci inverzní k funkci $y = 3x - 2$ pro $D(f) = \langle -1; 2\rangle$. Nakreslete grafy obou funkcí f a f^{-1} v jedné soustavě souřadnic.
  - nalezněte inverzní funkci k funkci $y = (x-2)^2 + 3$ a) pro $D(f) = (-\infty, 2\rangle$.

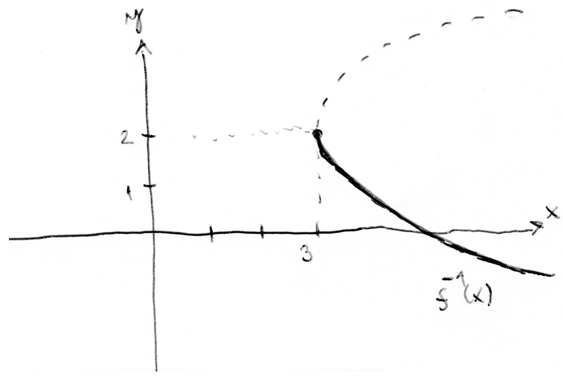
    Řešení: Graf kvadratické funkce pro $Df = R$ není funkce prostá (nabývá dvou stejných hodnot pro různá x, což poznáme podle toho, že rovnoběžky s osou x protínají její graf ve dvou různých bodech), proto k ní inverzní relace není funkcí. Když se omezíme na interval $Df = (-\infty; 2\rangle$, funkce už prostá je (jejím grafem je přesně polovina paraboly):



Funkci inverzní najdeme záměnou x za y v předpisu ($x = (y-2)^2 + 3$) a následným vyjádřením proměnné y z této rovnice:

$$y = 2 \pm \sqrt{x-3}.$$

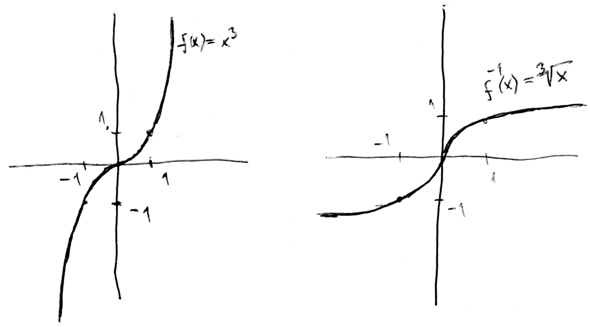
Tento vzorec ovšem není jednoznačným vyjádřením funkce díky operátoru $\pm$. Musíme rozhodnout, které z obou znamének vybrat. Pomocí je, že původní funkce f byla definovaná pro záporná x – to znamená, že (f a f^{-1} si navzájem zaměňují definiční obor a obor hodnot) funkce f^{-1} bude nabývat záporných hodnot, tj. správná volba znaménka je MINUS a hledaná funkce má tvar $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-3}$:



– nalezněte inverzní funkci k funkci $y = x^3$ pro $D(f) = R$.

Řešení: Funkce $f(x) = x^3$ je prostá pro všechna reálná x (= rovnoběžky s osou x protínají její graf vždy jen v jednom bodě), tj. k ní existuje funkce inverzní: Najdeme ji ze vztahu $y = x^3$ záměnou proměnných x a y a vyjádřením proměnné y:

$$x = y^3 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$



Všimněte si z grafů f a f^{-1} jednoho důležitého faktu: pokud f je rostoucí funkce, tak f^{-1} je také rostoucí – tato skutečnost nám může vždy pomoci jako kontrola, zda jsme graf funkce inverzní nakreslili správně.

Cvičení 11.1. Lineárně lomená funkce – zavedení pojmu. pdf hodina 2601 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.2. Grafy lineárně lomené funkce 1. pdf hodina 2602 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.3. Grafy lineárně lomené funkce 2. pdf hodina 2603 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.4.

4a) Nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ a určete Df a Hf.

4b) Uveďte vzorec lineárně lomené funkce, tj. funkce typu $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, pro kterou platí, že $Df = R \setminus \{3\}$, $Hf = R \setminus \{-1\}$ a f je rostoucí pro $x > 5$ (možná je f rostoucí i na jiných intervalech, ale hlavně ať je rostoucí pro $x > 5$).

4c) Lineárně lomená funkce je zadaná vztahem $f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$. Určete její Df, Hf a nakreslete graf.

Cvičení 11.5. Mocninné funkce – přirozený mocnitel. pdf hodina 2701 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.6. Mocninné funkce – záporný mocnitel. pdf hodina 2702 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.5. Nerovnosti – použití grafů mocninných funkcí. pdf hodina 2703 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.6. Inverzní funkce – první pohled na tento pojem, poté co byl představen v kapitole 9 ve formě inverzního zobrazení (inverzní funkce = inverzní zobrazení mezi množinami reálných čísel). pdf hodina 2708 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.7. Druhá odmocnina. pdf hodina 2709 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.8. Druhá odmocnina – graf. pdf hodina 2710 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.9. n-tá odmocnina. Pouze první příklad pdf hodiny 2711 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.10.

10a) Nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 3$ pro $x \in (2; \infty)$.

10b) Najděte vzorec funkce $f^{-1}(x)$ inverzní k funkci $f(x)$ z části (a) a nakreslete její graf do téhož obrázku jako graf z části (a).

Cvičení 11.11.

11a) Pro funkci $f(x) = (x+1)^{-2} - 3$ určete Df, Hf a nakreslete graf.

11b) Vypočtěte inverzní funkci k té funkci z části (a), jejíž definiční obor je zúžen pouze na kladná x, a nakreslete grafy obou funkcí do jednoho obrázku.

Cvičení 11.12. Pro následující funkce nakreslete jejich graf, určete $D(f)$, $H(f)$ a najděte příslušnou funkci inverzní: a) $f(x) = -x^2+1$, b) $f(x) = (x-5)^3$, c) $f(x) = \frac{-1}{x}+2$.

Cvičení 11.13. Pro následující funkce nakreslete jejich graf, určete $D(f)$, $H(f)$ a najděte příslušnou funkci inverzní: a) $f(x) = 2x^{-2}$, b) $f(x) = x^{-3} - 1$.

Cvičení 11.14. Nakreslete grafy funkcí $y = x^{-3}$ a $y = x^{-4}$. Existuje nějaký bod z definičného oboru těchto funkcí, ve kterém tyto funkce nabývají lokálního minima? Pokud ano, který? Pokud ne, proč?

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.11.

12 F) = Funkce exponenciální a logaritmické

12.1 Přednáška

Nástin přednášky:

- Ještě k pojmům sudá-lichá funkce, nebo funkce, která není ani sudá, ani lichá ... viz funkce typu A,B,C,D,E.
- A pojem funkce ohraničené zdola, shora, zcela ... viz funkce typu A,B,C,D,E ... tomuto a předchozímu pojmu jsme se na cvičení moc nevěnovali.
- F) exponenciální a logaritmické funkce: Kde se vzala funkce logaritmu? Podívejte se na anglické video (Tarek Said), které při zapnutých titulcích není až zas tak složité, a ukazuje, jak se objevily logaritmy:

  `https://www.youtube.com/watch?v=habHK6wLkic&ab_channel=TarekSaid`

  (dva záchytné body: 1614 Napier zveřejňuje tabulky, podle kterých se převede násobení čísel na sčítání ... jakási tabulková kalkulačka; kolem roku 1627 byla zveřejněna geometrická posloupnost s kvocientem 1,000001, která převádí násobící se čísla na aritmetickou posloupnost s kvocientem 0,000001 (nebo něco velmi blízkého tomuto převodnímu vztahu); čísla v aritmetické posloupnosti byla nazvána logoi aritmoi = poměrná čísla (logaritmoi); 1647 Řehoř od svatého Vincenta vyřešil problém, že obsah plochy mezi grafem nepřímé úměrnosti $\frac{1}{x}$ a osou x na intervalu od 1 do a je roven $logaritmos(a)$; až kolem roku 1667 byly přirozené logaritmy nezávisle vypočteny Mercatorem a Newtonem pomocí rozvoje nekonečné řady

  $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{x} + \cdots \qquad \text{pro } x \in (-1; 1\rangle;$$

  a až 101 let po práci sv. Vincenta, roku 1748, poskytl Euler základ, který charakterizuje příslušnou logaritmickou i exponenciální funkci: $e = 2{,}71828182845904\ldots$).
- Kde se vzala funkce exponenciální? Rybník o rozloze 1000 metrů čtverečních zarůstá sinicemi, každý den se počet metrů čtverečních zelené plochy zdvojnásobí. Na konci prvního dne je porostlý jen 1 metr čtvereční. Za kolik dnů se zaplní povrch rybníka?

  Nebo: každý den přibývá už jen 90 procent nakažených v nějaké nemoci, za kolik dní bude nárůst nakažených už stokrát menší, než první den? Řešíme vlastně rovnici $0{,}9^x = 0{,}01$.
- Funkce exponenciální a logaritmická pro $a \in (0; 1)$, výpis základních vlastností. Tyto funkce jsou si navzájem inverzní!
- Funkce exponenciální a logaritmická pro $a \in (1; \infty)$, výpis základních vlastností. Tyto funkce jsou si navzájem inverzní!
- definice logaritmu uvádí do souvislosti pojem logaritmické funkce jako inverzní funkce k funkci exponenciální (kde neznámá x se nachází v exponentu funkce):

  $$\log_a z = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = z.$$

  Pak následující příklady (učebnice pro gymnázia [9], Funkce (nakl. Prometheus)):

- str. 132, příklad 1: $\log_2 8 = \ldots$
- str. 133, příklad 2: $\log_{10} 0{,}01 = \ldots$
- str. 134, příklad 4: $\log_8 t = 3 \Rightarrow t = \ldots$
- str. 134, příklad 5: $\log_a 100 = 2 \Rightarrow a = \ldots$

- Metodika nakreslení grafu funkce $y = \log_{\frac{1}{4}} x$: tento graf skutečně kreslíme jinak, než jsme byli dosud zvyklí: na ose y vyznačíme hodnoty $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$ tak, že vedeme červeně tečkované rovnoběžky osy x protínající osu y v bodech 0, 1, -1 ... příslušné x-souřadnice spočteme tak, že umocníme základ $\frac{1}{4}$ na tyto hodnoty: $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \ldots$, $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \ldots$, $\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \ldots$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \ldots$ tyto souřadnice vyznačíme na ose x, k ose x vedeme kolmice k těmto souřadnicím a na průsečíku s příslušnou tečkovanou přímkou dostaneme bod grafu. Tj. graf funkce logaritmu skutečně získáme pomocí výpočtu mocnin, ale musíme umocňovat číslo y a výsledkem umocnění je číslo x.

- str. 135-136 učebnice pro gymnázia [9], Funkce (nakl. Prometheus) ... věty o logaritmech: protože logaritmy jsou vlastně mocniny, tak z pravidel pro mocniny vyplývají i pravidla pro logaritmy:

$$\begin{aligned} \log_a(r \cdot s) &= \log_a r + \log_a s \\ \log_a\left(\frac{r}{s}\right) &= \log_a r - \log_a s \\ \log_a\left(r^s\right) &= s \cdot \log_a r \end{aligned}$$

- Mezi logaritmy různých základů existuje vztah, který převádí logaritmus jistého základu na logaritmus jiného základu. Z těchto vzorců se nám bude hodit speciálně převod všech základů na logaritmus o tzv. přirozeném základu (**označení 39**)

$$\ln x := \log_e x,$$

kde $e = 2{,}718281828459\ldots$ je tzv. Eulerovo číslo, v matematice velmi důležité. Převodní vzorec je tvaru

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(vzorec lze zapamatovat tím způsobem, že ve funkci $\log_a x$ píšeme v jistém smyslu x nad hodnotu a, respektive a je napsáno v dolním indexu – podobně ve zlomku na pravé straně se vyskytuje podíl funkcí ln a opět argument x se vyskytuje graficky nad argumentem a)[44].

- A ještě poslední označení (**označení 40**): pokud u funkce $\log x$ není uveden žádný základ, zpravidla se jedná o

$$\log x := \log_{10} x$$

[44]Tento převodní vzorec budou studenti potřebovat v předmětu matematická analýza – při derivaci či integraci logaritmů různých základů obvykle převádíme na základ přirozený, Eulerovo číslo, a pak teprve provádíme integraci či derivaci. Hodí se nám přitom vědět, že $\ln a$ je konstanta, protože základ a se nemění, tak proto s $\ln a$ zacházíme při integraci či derivaci stejně jako s jakoukoli jinou konstantou. Také díky vzorci je možné si pamatovat (nebo mít tabulky) pouze logaritmy o přirozeném základu a všechny logaritmy o ostatních základech pomocí toho přirozeného základu spočítat.

(není to vždy pravidlem, v některých učebnicích se výrazem $\log x$ označuje přirozený logaritmus – v tom případě by to ovšem učebnice měla dát čtenáři vědět; v tomto textu $\log x$ znamená logaritmus o základu 10 a pro přirozený logaritmus budeme užívat jeho klasickou značku $\ln x$).

- Ve zbytku přednášky čtyři rovnice exponenciální a logaritmické, také jsou vzaty z dané učebnice pro gymnázia:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \log_{10}(x-1) &= 0{,}5 \cdot (\log_{10} x^5 - \log_{10} x);\\
\frac{1}{3^{-(u+2)}} - 2 &= 3^u;\\
\log_{10} x &= 2 - \log_{10} 5;\\
\log_2(x+14) + \log_2(x+2) &= 6.
\end{aligned}$$

12.2 Cvičení

Nástin cvičení:

- Dva lidi k tabuli: jeden nakreslí grafy $y = x^4$, $y = 4^x$; druhý grafy $y = x^3$, $y = 3^x$ ... jaký je rozdíl mezi funkcí mocninnou a funkcí exponenciální?
- Další dva lidi: Nakreslete graf funkce $y = 2^x$ a vypište její vlastnosti; nakreslete graf funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a vypište její vlastnosti. Statická dovednost: dosaďte $x = 0$, $x = 1$.
- Další dva lidi: pojďte do téhož obrázku nakreslit graf funkce inverzní f^{-1} a vypište její vlastnosti, které jsou odlišné od vlastností funkce f. Statická dovednost: dosaďte $x = 1$, $x =$ základ logaritmu.
- Porovnejte hodnoty $\left(\frac{7}{3}\right)^{-0{,}5}$ a 1 pomocí grafu funkce $y = \left(\frac{7}{3}\right)^x$.
- Porovnejte hodnoty $0{,}4^{1{,}6}$ a $0{,}4^{1{,}8}$ pomocí grafu funkce $y = 0{,}4^x$.
- Další dva studenti k tabuli: Nakreslete graf následující funkce, který vznikne buď po úpravě vzorce, nebo spojením posunutí a osové souměrnosti ze základního tvaru grafu exponenciální funkce: a) $y = 2^{x+3} - 1$, b) $y = 2^{-x}$.
- Nalezněte vzorec inverzní funkce f^{-1} k exponenciální funkci v části (a) předchozí odrážky a do téhož obrázku jako f nakreslete graf funkce f^{-1}.
- Nakreslete graf funkce $f(x) = 2 - 0{,}3^x$ a určete její vlastnosti.
- Najděte inverzní funkci f^{-1} k funkci f z předchozí odrážky a nakreslete jinou barvou do téhož obrázku její graf.
- Práce s logaritmickými funkcemi: Začneme řešením logaritmických nerovnic s grafickou podporou. Najděte všechna $x \in R$, pro něž platí $\log_2 x > \log_2 4$, zdůvodněte s využitím grafu funkce $y = \log_2 x$.
- Najděte všechna $x \in R$, pro něž platí $\log_{0{,}5} x \geq \log_{0{,}5} 2$, zdůvodněte s využitím grafu funkce $y = \log_{0{,}5} x$.

- Dva lidi k tabuli: nakreslete grafy mírně modifikovaných logaritmických funkcí (osovou souměrností a posunutím), určete jejich Df, Hf: a) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) - 1$; b) $y = \log_3(1-x) + 2$.
- K funkci (a) z předchozí odrážky určete funkci inverzní grafem i vzorcem.
- A závěrem opačná dovednost: graf funkce rostoucí je takový, že $Hf = (-\infty; 2)$ a prochází bodem $[3; 1]$, tedy funkční hodnoty se pro rostoucí x blíží asymptoticky ke konstantní funkci $y = 2$. Najděte vzorec exponenciální funkce (mírně pozměněné, díky posunutí a osové souměrnosti), které je grafem.
- A druhý díl závěrečné dovednosti: Funkce f je klesající s definičním oborem $Df = (2; \infty)$ a prochází bodem $[3; 2]$. Přímka $x = 2$ je svislou asymptotou funkce. Nalezněte její vzorec pomocí posunutého logaritmu.

Cvičení 12.1.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = 0{,}5^x$ a určete Df a Hf.

b) Napište vzorec funkce $f^{-1}(x)$ inverzní k funkci $f(x)$ z části (a).

Cvičení 12.2.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = 0{,}3^{-x} + 2$, určete Df a Hf.

b) Najděte vzorec inverzní funkce f^{-1} k funkci z části (a).

Cvičení 12.3.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = \log_2(x-1)$ a určete Df a Hf.

b) Vyjádřete neznámou y z rovnice $\ln y = x^2 + 2$.

Cvičení 12.4.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = -\log_2(x-1) + 2$ a určete Df a Hf.

b) Nalezněte vzorec funkce inverzní k funkci (a) a nakreslete její graf.

Cvičení 12.5. Je dána funkce $f(x) = 2^{x-1} + 3$. Najděte vzorec funkce inverzní f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku, určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$, $H(f^{-1})$.

Cvičení 12.6. Nakreslete grafy funkcí (do tří různých obrázků) a) $y = 0{,}3^x$; b) $y = -0{,}3^x$; c) $y = 2 - 0{,}3^x$; k poslední uvedené funkci najděte vzorec pro funkci inverzní a nakreslete ji do obrázku c).

Cvičení 12.7. Pro funkci $y = 2 \cdot \log_4 x - 1$ nalezněte vzorec funkce inverzní.

Cvičení 12.8. Je dána funkce $f(x) = \log_5(x+2) - 1$. Najděte vzorec funkce inverzní f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku, určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$, $H(f^{-1})$.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.12.

13 G) = Goniometrické funkce

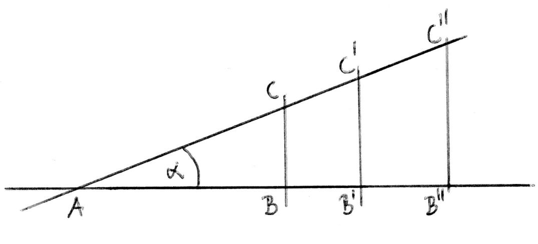
13.1 Přednáška

Odkud se vzaly goniometrické funkce? Označení pochází z řečtiny: *hé gé* ... země, odtud „geometrie“ = měření země, zeměměřičství; dále *hé gónia* ... úhel, roh, úhelný kámen, tj. odtud „goniometrie“ = měření úhlů, úhloměřičství. Nástin přednášky (spíše asi skripta přes projektor, je to přednáška v obrazech):

- Definice funkcí úhlu (v pravoúhlém trojúhelníku, viz obrázek), orientovaný úhel, stupňová a oblouková míra úhlu („namotáme“ reálnou osu na kružnici o jednotkovém poloměru, viz obrázek)
- Rozšíření goniometrických funkcí z úhlů trojúhelníku na R:
  - důvod rozšíření funkcí $\sin x$, $\cos x$ na celé R: pohyb po kružnici, kmitání pružiny-struny netlumené nebo tlumené.
  - jak si zapamatovat hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro šestnáct základních úhlů ... viz dva obrázky;
  - řešení rovnic ... vyřešte v R: $\sin x = 0{,}5$; vyřešte v R: $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.
- Dovednost, za jejíž neznalost byste mohli zkoušku nesložit: Nakreslete grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, tg x, cotg x, arcsin x, arccos x, arctg x, arccotg x a vypište jejich základní vlastnosti.
- Dovednost, za jejíž neznalost NEbudete vyhozeni od zkoušky: Nakreslete grafy funkcí mírně modifikované posunutím, osovou souměrností nebo vynásobením konstantou z funkcí $\sin x$, $\cos x$, tg x, cotg x, arcsin x, arccos x, arctg x, arccotg x a vypište jejich základní vlastnosti.

A. Označení goniometrických funkcí

Pokud přeskočíme definici úhlu ze základní školy a podíváme se na středoškolskou definici goniometrických funkcí, mohla by se odehrávat následovně: Když se podíváme na pravoúhlé trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$, které jsou podobné díky všem třem úhlům navzájem shodným (viz obrázek 17, trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$),



Obrázek 17: Pravoúhlé trojúhelníky, které jsou podobné.

vidíme, že například poměr délky odvěsny protilehlé vrcholu A ku délce přepony se nemění a zůstává ve všech třech pravoúhlých trojúhelnících stejný – a je tedy spíše vlastností úhlu α sklonu přepony vůči vodorovné odvěsně, než vlastností délek; označme tento poměr $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha := \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|AC'|} = \frac{|B''C''|}{|AC''|}.$$

V praxi pak například lze určit z těchto vztahů $|BC| = |AC| \cdot \sin\alpha$, tj. délku jedné strany pravoúhlého trojúhelníka lze vypočítat pomocí délky jiné strany a hodnoty $\sin\alpha$.

Podobně v obrázku vidíme další poměry stran, které se nemění, pokud zachováváme všechny úhly trojúhelníka stejné, přičemž jeden z nich je pravý, a sice

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &:= \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB'|}{|AC'|} = \frac{|AB''|}{|AC''|},\\
\operatorname{tg}\alpha &:= \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|AB'|} = \frac{|B''C''|}{|AB''|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\\
\operatorname{cotg}\alpha &:= \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|} = \frac{|AB''|}{|B''C''|} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}
\end{aligned}$$

(v daných rovnostech jsou uvedeny jak definiční vztahy :=, tak z nich vyplývající vztahy mezi jednotlivými definicemi, které plynou z toho, že u funkcí $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ dáváme funkce $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ do vzájemného poměru). Tím způsobem jsme definovali funkce popisující jistou vlastnost ostrých úhlů, tj. úhlů, které mohou vzniknout jako vnitřní úhly při vrcholu A v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

B. Dvě metody měření úhlů

Při měření a popisu úhlů existují dvě základní metody neboli míry:

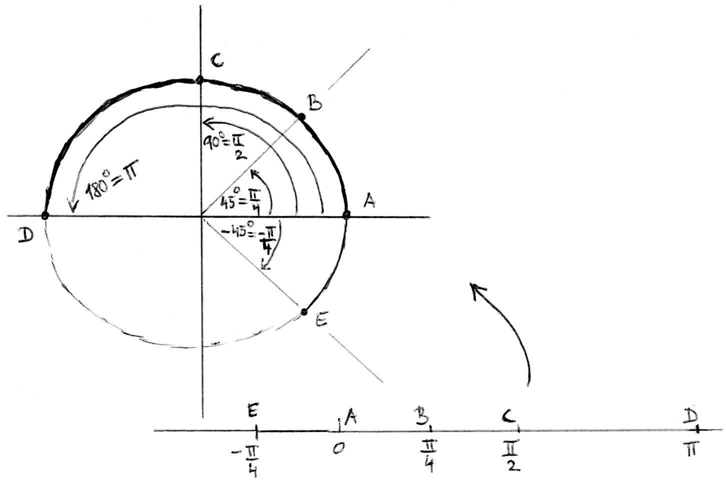
a) Stupňová míra ... plnému úhlu se přisoudí velikost 360°, pravému úhlu velikost 90°, přímému úhlu velikost 180°, atd.

b) Oblouková míra = délka oblouku:

Když reálnou číselnou osu „namotáme“[45] na jednotkovou kružnici se středem v počátku a poloměrem 1, na této kružnici dostáváme obrazy reálných čísel – nyní dostáváme úhly určené na jedné straně polopřímkou určenou kladným směrem vodorovné osy, na druhé straně polopřímkou vycházející z počátku, která prochází obrazem reálného čísla „namotaného“ na jednotkové kružnici. Obloukové míře se někdy říká i radiánová míra, kde jednotka jeden radián odpovídá úhlu s vrcholem v počátku a rameny procházejícími obrazy bodů 0 a 1 na jednotkové kružnici (úhel o velikosti jednoho radiánu tedy vytíná na jednotkové kružnici popsané v předchozí konstrukci oblouk délky 1).

V těchto dvou mírách potom

[45] Na obě strany donekonečna, tj. to namotávání by nám zabralo hodně času – nicméně toto přibližné vyjadřování je formální, ne že bychom to nekonečné namotávání museli prakticky provést.

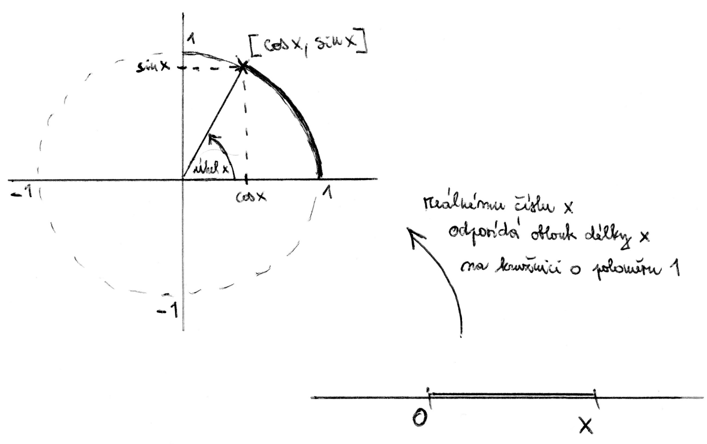


Obrázek 18: Namotání reálné osy na kružnici o poloměru 1.

hodnotě 45° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{4}$ rad,
hodnotě 90° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{2}$ rad,
hodnotě 180° odpovídá oblouková délka π rad,
atd.

C. Rozšířená definice goniometrických funkcí

Tímto „namotáním“ reálné číselné osy na jednotkovou kružnici, která se dále nachází také v rovině, ve které jsme umístili kartézskou soustavu souřadnic (= vodorovnou a svislou osu) s počátkem ve středu kružnice, lze rozšířit definici goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$ (a tím i $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$) pro jakékoli reálné x následovně – viz obrázek 19 :



Obrázek 19: Rozšíření definice funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro libovolné reálné x.

Souřadnice obrazu bodu x po namotání na jednotkovou kružnici jsou v kartézské soustavě bodů v rovině, ve které se kružnice nachází, rovny $[\cos x, \sin x]$.

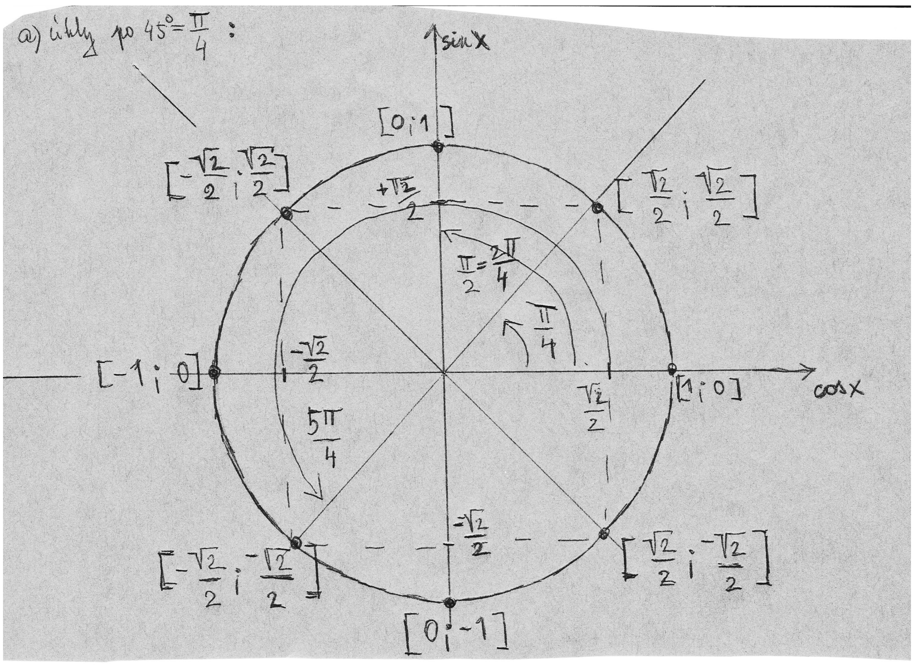
D. Význačné hodnoty goniometrických funkcí

Je důležité pamatovat si hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly x, minimálně hodnoty v tabulce:

x (°)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.
cotg x	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0

Zapamatování údajů z předchozí tabulky právě usnadňuje geometrický význam těchto hodnot jako souřadnic $[\cos x, \sin x]$ obrazu bodu x při namotání reálné osy na jednotkovou kružnici[46].

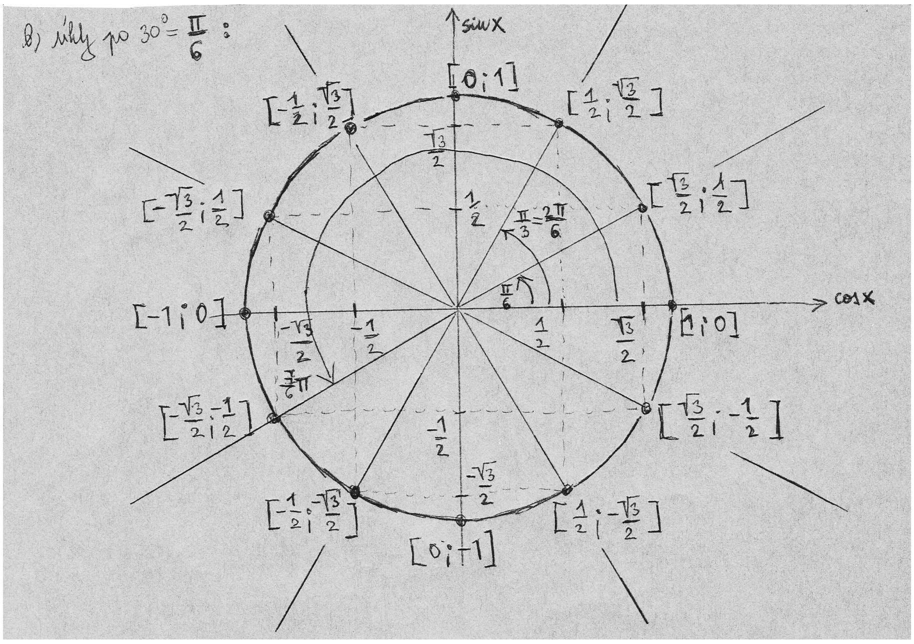
- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$ jsou uvedeny na obrázku 20:



Obrázek 20: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$.

[46] Pozor, záleží na pořadí, první souřadnice bodů na jednotkové kružnici je rovna hodnotě $\cos x$, druhá souřadnice hodnotě $\sin x$.

- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$ jsou uvedeny na obrázku 21:



Obrázek 21: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$.

Znalost hodnot goniometrických funkcí v těchto úhlech je důležitá pro řešení goniometrických rovnic:

Příklad 13.1. vyřešte v R: $\sin x = 0{,}5$;

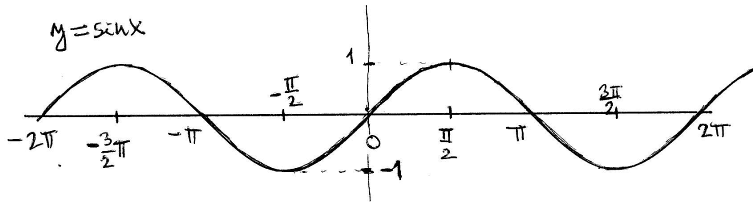
Příklad 13.2. vyřešte v R: $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

E. Graf a vlastnosti goniometrických funkcí

Podívejme se nyní na grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, tg x, cotg x s definičním oborem rozšířeným pro všechna $x \in R$ a z grafů se pokusíme vyčíst jejich vlastnosti.

- Vlastnosti funkce $\sin x$ vyčtené z jejího grafu:

a) Graf vidíme na obrázku:



b) $D(f) = R$.

c) $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

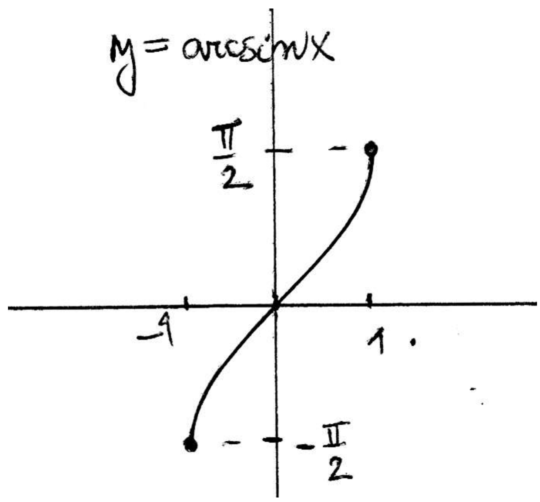
d) Funkce $\sin x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

e) Funkce $\sin x$ je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí $\sin(-x) = -\sin x$ pro libovolné $x \in R$.

f) Funkce $\sin x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).

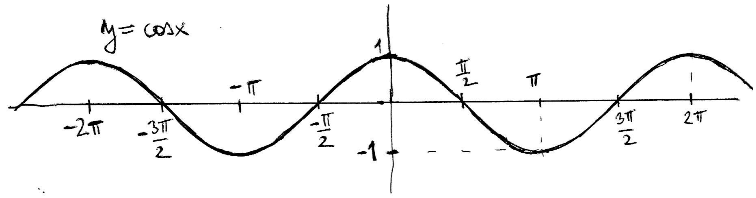
g) Funkce $\sin x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

h) Funkce $f(x) = \sin x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci $\sin x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \sin x$ pro $x \in \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \arcsin x$:



- Vlastnosti funkce $\cos x$ vyčtené z jejího grafu:

  a) Graf funkce $\cos x$ vidíme na obrázku:



  b) $D(f) = R$.

  c) $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

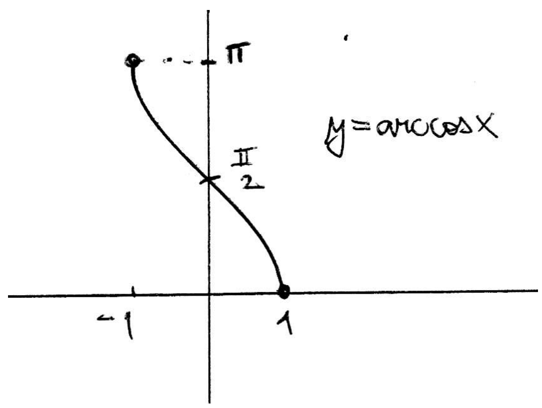
  d) Funkce $\cos x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\pi + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $0 + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

  e) Funkce $\cos x$ je sudá, protože její graf je osově souměrný podle svislé osy y, tj. platí $\cos(-x) = \cos x$ pro libovolné $x \in R$.

  f) Funkce $\cos x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).

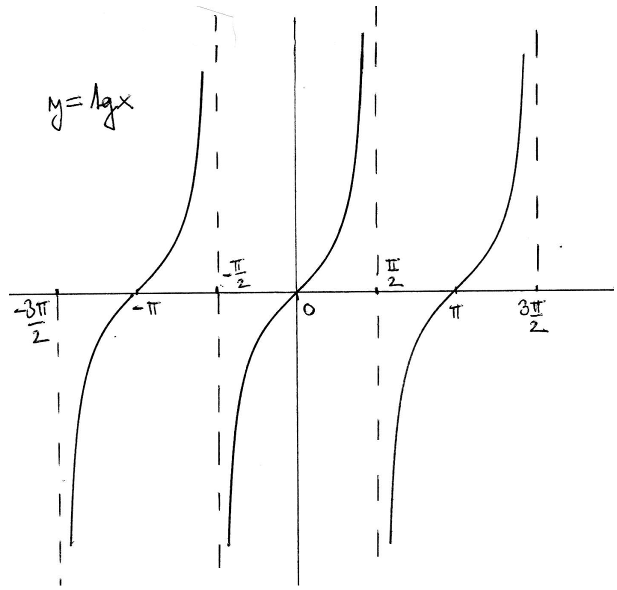
  g) Funkce $\cos x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

  h) Funkce $f(x) = \cos x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci $\cos x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \cos x$ pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \arccos x$:



- Vlastnosti funkce tg x vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce tg x vidíme na obrázku:



b) $D(f) = R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

c) $H(f) = R$.

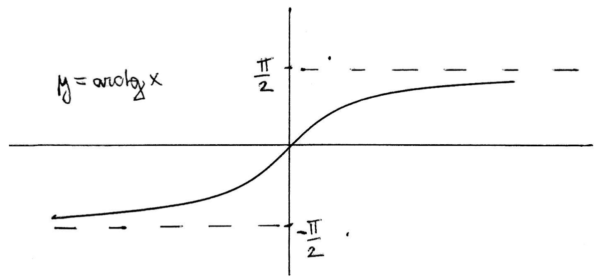
d) Funkce tg x je rostoucí na každém z intervalů $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a nemá lokální extrémy.

e) Funkce tg x je lichá[47], protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí tg $(-x) = -$tg x pro libovolné $x \in D(f)$.

f) Funkce tg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce tg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

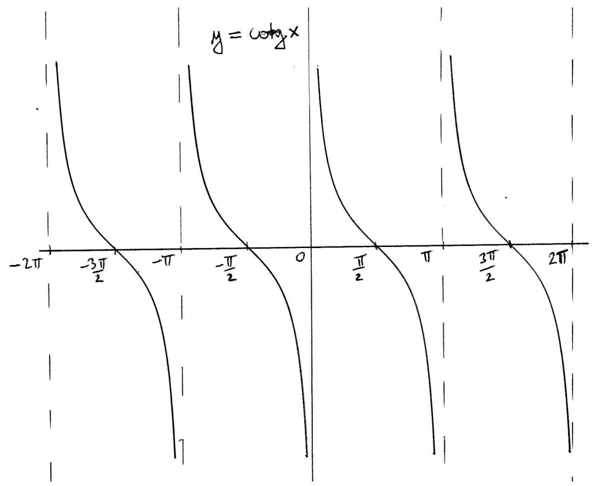
h) Funkce $f(x) =$ tg x není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci tg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) =$ tg x pro $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) =$ arctg x:



[47] Součin nebo podíl dvou funkcí, z nichž jedna je lichá a druhá sudá, je lichá funkce ... díky této vlastnosti víme, že funkce tg x i cotg x jsou liché.

- Vlastnosti funkce cotg x vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce cotg x vidíme na obrázku:



b) $D(f) = R - \{0 + k\pi\}$.

c) $H(f) = R$.

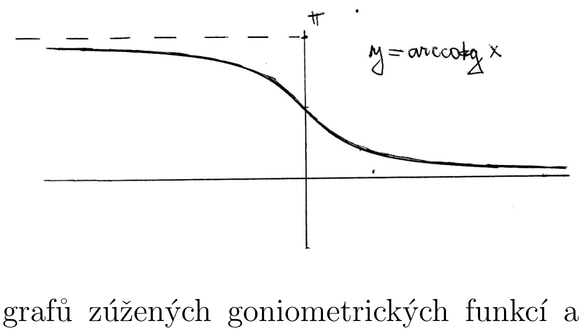
d) Funkce cotg x je klesající na každém z intervalů $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$ a nemá lokální extrémy.

e) Funkce cotg x je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí cotg $(-x) = -$cotg x pro libovolné $x \in D(f)$.

f) Funkce cotg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce cotg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

h) Funkce $f(x) =$ cotg x není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci cotg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) =$ cotg x pro $x \in (0; \pi)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) =$ arccotg x:



Zapamatovat si průběh grafů zúžených goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních lze pomocí následujících dvou faktů: a) inverzní funkce k rostoucí funkci je opět rostoucí (jak je to u funkcí zúžený $\sin x$ a zúžený tg x); inverzní funkce ke klesající funkci je opět klesající (jak je to u funkcí zúžený $\cos x$ a zúžený cotg x); b) $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(F^{-1})$ ... platí pro všechny čtyři zúžené goniometrické funkce.

13.2 Cvičení

Poznámky ke cvičení 13:

- Z bloku A jen 1) vyznačení šestnácti základních úhlů na jednotkové kružnici (násobky $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{4}$) a zkoušení, o jaký úhel se jedná; 2) nějaké goniometrické rovnice ze 13.3, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, preferovaně v obloukové míře.
- Z bloků B,C,D kreslení grafů goniom. a cyklomet. fcí v základní poloze a výpis všech jejich vlastností (zejména pokud se některá z osmi funkcí nestihla na přednášce).
- První dvě odrážky jsou povinná znalost při zkoušení – dále snad z bloku E jen cvičení 13.7 nebo nějaké jiné z bloků B,C,D na posun grafu goniom. a cyklomet. funkce kousek ze základní polohy. Pokud na tuto odrážku nezbude moc času, tak řešení 13.7 je na konci skript, řešení příkladů z učebnice pro gymnázia je na konci učebnice pro gymnázia.

Blok A: goniometrické rovnice řešené pomocí jednotkové kružnice, řešením může být jen šestnáct základních úhlů

Cvičení 13.1. Velikost úhlu ve stupňové a obloukové míře

1. Str. 21-23, řešený př. 1.
2. Převodní vztahy mezi stupni a radiány získáme z trojčlenky podle toho, zda se nám líbí více vzorec se 180° nebo 360°:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ rad } \ldots & \dfrac{\pi}{180} \text{ stupnů} = \dfrac{2\pi}{360} \text{ stupňů;} \\ x \text{ rad } \ldots & \alpha \text{ stupňů.} \end{array}$$

   Odtud získáme vzorec pro převod stupňů na radiány

$$\alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi} = \frac{x \cdot 360}{2\pi}$$

   nebo radiány na stupně

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}.$$

3. Str. 24, příklady 5 a 6 ... konkrétní převod míry úhlu z radiánů na stupně nebo naopak. Další příklady str. 25, př. 2.10.a), 2.11.a).

Cvičení 13.2. Orientovaný úhel a jeho vlastnosti

1. Str. 27-28 ... základní velikost orientovaného úhlu: $0 \leq \alpha < 2\pi$ v obloukové míře, respektive $0 \leq \alpha < 360$ v úhlové míře;
2. orientovaný úhel, který nemá základní velikost, lze převést na úhel se základní velikostí odečtením či přičtením vhodného násobku 2π, respektive v úhlové míře vhodného násobku 360°;

3. př. 1-str. 29, další příklady: 2.19-str.32, 2.20-str.33, 2.21, 2.22.

Cvičení 13.3. Základní příklad: Goniometrické rovnice řešte pouze z náčrtku jednotkové kružnice, ze které odečtete hodnotu $\cos x$ jako souřadnici první, $\sin x$ jako souřadnici druhou koncového bodu na oblouku délky x kružnice o jednotkovém poloměru – řešením může být pouze jeden ze šestnácti úhlů, jehož hodnoty sinus a cosinus se máte naučit nazpaměť:

1. Str. 61 – příklad 1 ... využití jednotkové kružnice;

2. další příklady: str.68 – př. 2.52.

Blok B: Funkce $\sin x$ a $\cos x$

Cvičení 13.4. Vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$

1. Řešené příklady 6-str.37 a 1-str.38-39;

2. další příklady: str.40-41, příklady 2.24 až 2.33.

Cvičení 13.5. Základní příklad: nakreslete grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$ a určete jejich vlastnosti; rozšiřující příklady:

1. Str. 42 ... grafy; str. 43 – př. 1, str. 44 – př. 2, str. 46 – př. 3, str. 48 – př. 2.39;

2. další příklady: str. 49 – př. 2.40.

Blok C: Funkce tg x, cotg x

Cvičení 13.6. Základní příklad: nakreslete grafy funkcí tg x, cotg x a určete jejich vlastnosti; rozšiřující příklady:

1. Str. 57-58 ... grafy; str. 55 – příklad 1;

2. str. 60 – př. 2.43 až 2.49.

Blok D: Funkce arcsin x, arccos x, arctg x, arccotg x

Cvičení 13.7. Základní příklad: nakreslete grafy cyklometrických funkcí arcsin x, arccos x, arctg x, arccotg x a určete jejich vlastnosti; rozšiřující příklady:

1. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \text{arccos } x$;

2. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \text{arccos } (-x)$;

3. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = -\text{arccos } x$;

4. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \text{arccos } (x+2)$;

5. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \text{arccos } (2x)$;

6. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = 2 \cdot \text{arccos } x$;

7. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = 2 + \text{arccos } x$;

8. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$;
9. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arccos(3x - 2)$;
10. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arccotg}(2x - 5) + \pi$.

Blok E: Úlohy na zopakování goniometrických a cyklometrických funkcí:

Cvičení 13.8. Úlohy k opakování – str. 69-70, příklady 2.60 až 2.68.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 14.13, některých zase na konci odkazované učebnice Goniometrie.

14 Výsledky některých příkladů

14.1 Výsledky ke kapitole 1.2 – logické spojky, univerzální výroky, důkaz výčtem pravdivostních hodnot

Ad cvičení 1.1. Studenti sami – každý řádek obou výrokových forem má stejnou pravdivostní hodnotu při všech kombinacích pravdivostních hodnot jeho dílčích výrokových proměnných.

Ad cvičení 1.2. Negace výroků:

a) Existuje přirozené číslo, které není rovno součtu všech svých dělitelů. Mimochodem, číslům, která jsou rovna součtu všech svých dělitelů **mimo číslo samotné**, se říká dokonalá čísla – patří mezi ně např. 6 nebo 28, protože

$$6 = 1 + 2 + 3, \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

b) Dnes nebude pršet nebo nebudeme psát písemku z matematiky. Tím pádem ten den nebude tak hrozný.

c) Aspoň jeden učený z nebe spadl.

d) Existují nejvýše dně přirozená čísla, která jsou rovna součtu všech svých dělitelů.

e) Existuje aspoň pět prvočísel.

f) Dnes večer nepůjdu do kina ani si nepřečtu zajímavou knihu. Rozhodl jsem se trucovat.

g) Existuje nanejvýš jedno nebo existují aspoň tři celá čísla, která se rovnají své druhé mocnině. Původní věta je skutečně pravdivá – danými **právě dvěma celými čísly** jsou 0 a 1.

Ad cvičení 1.3. Symbolický zápis je:

a) $\forall n \in N \; \exists \, k \in N : k > 2n + 1$. Jedná se o pravdivý výrok.

b) $\forall z \in Z \; \exists \, k \in Z : k - 1 < z^3$. Krásně rozlišujeme prvky množiny malými písmeny, samotné množiny označujeme velkými písmeny. Matematický zápis má pravidla, která by měla být pomocí čtenáři i autorovi textu. Výrok je mimochodem také pravdivý.

Ad cvičení 1.4. Negace jsou:

a) Půjdu na ten večírek, ale Ondra tam nepůjde, nebo se také může stát, že Ondra půjde na večírek a já tam nepůjdu.

b) Přijde Honza a já mu o tom neřeknu. Nebo: Přijde Honza, ale neřeknu mu o tom.

Ad cvičení 1.5. Negace výroků podle ekvivalentních úprav:

a)

$$\neg((A \Rightarrow B) \wedge C) \overset{v.01}{\Leftrightarrow} \neg(A \Rightarrow B) \vee (\neg C) \overset{dsl.v.06}{\Leftrightarrow} (A \wedge \neg B) \vee \neg C.$$

b)

$$\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) \overset{dsl.v.06}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg(B \vee C) \overset{v.02}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg B \wedge \neg C.$$

c)

$$\neg((A \vee B) \wedge C) \overset{v.01}{\Leftrightarrow} \neg(A \vee B) \vee \neg C \overset{v.02}{\Leftrightarrow} (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C.$$

Ad cvičení 1.6. Symbolický zápis výroků:

a) $\exists n \in N: \ n + 5 > 10.$

b) $\forall n \in N: \ 6|n \ \Leftrightarrow \ (2|n \ \wedge \ 3|n).$

Ad cvičení 1.7. Negace výroků ze cvičení 1.6:

a) $\forall n \in N: \ n + 5 \leq 10$ (výrok je nepravdivý). Znak $\exists$ jsme tedy nahradili v negaci znakem $\forall$, a současně jsme znegovali i podmínku za dvojtečkou.

b) $\exists n \in N: \ [6|n \ \wedge \ (2 \nmid n \ \vee \ 3 \nmid n)] \ \vee \ (2|n \ \wedge \ 3|n \ \wedge \ 6 \nmid n).$

14.2 Výsledky ke kapitole 2.2 – důkaz implikace (přímý a nepřímý), důkaz ekvivalence

Ad cvičení 2.5. Předpokládáme, že platí $n = 2k - 1$. Pak zkoumáme druhou mocninu tohoto čísla zmenšenou o 1 a dostaneme:

$$(2k - 1)^2 - 1 = 4k^2 - 4k + 1 - 1 = 4k(k - 1).$$

Součin $k(k-1)$ je součin po sobě jdoucích čísel, a tedy číslo sudé nebo pro $k = 1$ nula, tj. číslo dělitelné dvěma. Odtud jeho čtyřnásobek je dělitelný osmi.

Ad cvičení 2.6. Předpokládáme, že platí $a = 2k+1$, $b = 2l+1$. Pak zkoumáme rozdíl jejich druhých mocnin a dostaneme:

$$(2k + 1)^2 - (2l + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4l^2 - 4l - 1 = 4k(k + 1) - 4l(l + 1).$$

Podle cvičení 2.5 se jedná o rozdíl čísel dělitelných osmi, tj. výsledek je číslo dělitelné osmi.

Ad cvičení 2.7. Předpokládáme, že platí $a = 2k - 1$, $b = 2k$, $c = 2k + 1$. Pak zkoumáme jejich součet a dostaneme: $2k - 1 + 2k + 2k + 1 = 6k$, a to je číslo evidentně dělitelné šesti (každý násobek šesti je dělitelný šesti).

14.3 Výsledky ke kapitole 3.2 – důkaz sporem, indukcí, konstrukcí a protipříkladem

Ad Cvičení 3.1. Viz cvičení.

Ad Cvičení 3.2. Viz domácí úkol – konzultace před prověrkou.

Ad Cvičení 3.4. Ad a): viz cvičení.

ad b):

i) $n = 1$ dosadíme do obou stran rovnosti: $1 = 1^2$ ... platí;
$n = 2$ dosadíme do obou stran: $1 + 3 = 2^2$ ... platí.

ii) Předpokládáme platnost indukčního předpokladu: Vzorec platí pro n, tj.

$$1 + 3 + 5 \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2.$$

Odtud nyní dokážeme (chceme dokázat) platnost vztahu pro $(n + 1)$[48]:

$$1 + 2 + \cdots + (2(n + 1) - 3) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2,$$

což lze upravit na vztah

$$1 + 2 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Zkusme upravit levou stranu dokazované rovnosti s využitím pravé strany indukčního předpokladu (a poté použijeme vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ale z druhé strany, tj. zprava doleva):

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + (2n - 1)}_{=n^2} + (2n + 1) \overset{ind.p.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

A to jsme chtěli dokázat, důkaz je hotov. S využitím platnosti vztahu pro n jsme dokázali, že platí i pro $(n + 1)$.

Ad Cvičení 3.5. Důkaz sporem: Předpokládejme, že $\sqrt{3}$ JE racionální číslo, tj. lze je vyjádřit ve tvaru zlomku. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že v tomto zlomku už nelze krátit, tj. pokud je krácení možné, provádíme je tak dlouho, až dospějeme do vztahu

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n},$$

kde $m \in Z$, $n \in N$ a čísla m, n jsou nesoudělná (= nemají společného dělitele většího než číslo 1). Umocněním obou stran na druhou dostaneme

$$3 = \frac{m^2}{n^2},$$

a tedy

$$3n^2 = m^2.$$

[48] Napíšeme tedy přesně stejný vztah, ale místo n píšeme všude $(n + 1)$.

Z poslední rovnosti plyne, že číslo m^2 je dělitelné třemi, a tedy i číslo m musí být dělitelné třemi, tj. $m = 3k$ pro $k \in N$. Dosazením do naší rovnosti máme

$$3n^2 = 9k^2, \quad \text{po vydělení třemi } n^2 = 3k^2.$$

Z poslední rovnosti plyne, že číslo n^2 je dělitelné třemi, a tedy i číslo n musí být dělitelné třemi, tj. $n = 3l$ pro nějaké $l \in N$ – ale to je spor s konstrukcí čísel m, n, protože jsme je sestavili tak, aby neměli žádného jiného přirozeného dělitele než číslo 1. Dospěli jsme řetězcem přesných úvah ke sporu – nesprávný je tedy původní předpoklad, tj. platí jeho opak, $\sqrt{3}$ není číslo racionální, nelze ji vyjádřit ve tvaru zlomku.

Ad cvičení 3.6. Větu $2|n^2 \;\Rightarrow\; 2|n$ dokážeme nepřímo, tj. budeme dokazovat přímo její obměnu:

$$2 \not| n \;\Rightarrow\; 2 \not| n^2.$$

Úsudek 01: Pokud $2 \not| n$, tak n je liché, tj. $n = 2k + 1$ pro nějaké $k \in N$.

Úsudek 02: Pokud $n = 2k + 1$, tak $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$, tedy číslo liché.

Závěr: n^2 je liché, tj. $2 \not| n^2$. Důkaz je hotov.

Ad cvičení 3.8. Implikaci lze dokázat, nejlépe nepřímo.

14.4 Výsledky ke kapitole 4.2 – Operace s množinami, důkaz užitím Vennových diagramů, kartézský součin

Ad cvičení 4.9. Symbolické definice pojmů:

a) $\overline{A} = \{x \in U : \ x \notin A\}$.

b) $A \setminus B = \{x \in A : \ x \notin B\}$.

c) $A \times B = \{[x, y] : \ x \in A, \ y \in B\}$.

d) $A \cup B = \{x : \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

e) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

f) $A \div B = \{x : \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \notin A)\}$.

Ad cvičení 4.10. $(\overline{A \cup B}) \cap C = \{17, 18, 19\}$.

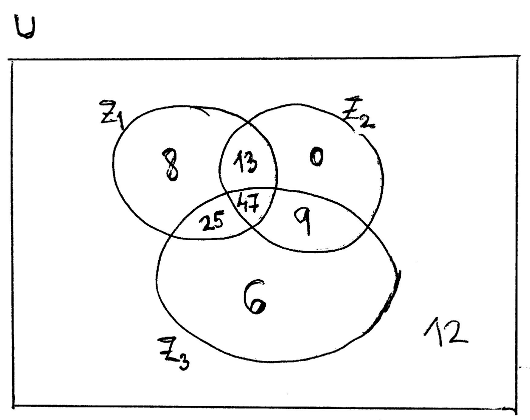
Ad cvičení 4.11.

a) Množina je soubor navzájem rozlišitelných prvků.

b) Například $S = (C - A) \cup (A \cap B \cap C)$.

Ad cvičení 4.12. a) Například $(B \cap C) \setminus A$; b) například $(B \setminus (A \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$; c) například $(B \cap D) \setminus C$; d) například $B \setminus (A \cup C)$.

Ad cvičení 4.13. Označme Z_1 množinu studentů, kteří složili zkoušku první, Z_2 množinu těch, co složili zkoušku druhou, Z_3 množinu těch, co složili zkoušku třetí. Nakreslíme-li si tyto množiny v obecné poloze, můžeme pomalu vyplňovat počty prvků v jednotlivých oblastech roviny – počínaje těmi, které víme naprosto jistě.



Postupně dostaneme:

- Deset procent studentů nesložilo žádnou zkoušku ... mimo kruhy píšeme číslo 12.
- Nebyl nikdo, kdo by složil zkoušku pouze z druhého předmětu ... do $Z_2 - Z_1 \cup Z_3$ píšeme číslo 0.

- Dvacet studentů neobstálo ani u jednoho z nich – je míněno „ani u druhého, ani u třetího předmětu“, o nichž byla řeč v první části souvětí (i čeština správně pochopená hraje roli) ... do $Z_1 - Z_2 \cup Z_3$ píšeme číslo 8, protože jsme od 20 odečetli ještě 12 studentů, kteří jsou úplně mimo.
- 9 studentů složilo druhou zkoušku, ale ne zkoušku první ... to je krásná informace o počtu studentů v množině $Z_2 \cap Z_3 - Z_1$ (zkouška: $0 + 9 = 9$ studentů se nachází v množině $Z_2 - Z_1$).
- 56 studentů složilo úspěšně zkoušku ze druhého i třetího předmětu ... toto je informace o počtu prvků množiny $Z_2 \cap Z_3$ ... odtud lze určit počet studentů v průniku všech tří množin: $56 - 9 = 47$.
- 33 studentů nevyhovělo ze třetího předmětu ... mimo množinu Z_3 je 33 studentů a tyto oblasti roviny mimo jediné máme už prošetřeny, tj. do zbývajícího pole $Z_1 \cap Z_2 - Z_3$ píšeme $33 - 12 - 0 - 8 = 13$.
- 47 studentů složilo ze tří zkoušek dvě ... tato informace se týká součtu počtu studentů ze tří různých oblastí – jedná se o studentu nacházející se v průniku vždy dvou množin, ale mimo průnik všech tří množin. Dvě z těchto tří částí máme už popsány, tj. tu třetí určíme odečtením počtu prvků zbylých dvou od 47, dostaneme

$$|Z_1 \cap Z_3 - Z_2| = 47 - 13 - 9 = 25.$$

Nyní máme ve Vennově diagramu informace o všech částech roviny kromě té, na kterou se ptá zadání úlohy: Kolik studentů složilo výlučně předmět třetí? Tuto informaci získáme, když odečteme všech sedm počtů navzájem disjunktních množin od čísla 120:

$$120 - 12 - 0 - 8 - 13 - 47 - 25 - 9 = 120 - 114 = \underline{\underline{6}}.$$

14.5 Výsledky ke kapitole 5.2 – Dělitelnost celých čísel, důkaz užitím Dirichletova principu, operace s komplexními čísly

Ad Příklad 5.3.

ad a) $25 : 3 = 8$, zbytek je 1; tedy $25 = 3 \cdot 8 + 1$, tj. $q = 8$, $r = 1$.

ad b) $(-25) : 3 = -8$, zbytek je -1; tedy $-25 = 3 \cdot (-8) + (-1)$ ... to ještě nesplňuje podmínku věty, odečteme tedy dělitele 3 od pravé strany a současně jej přičteme:

$$-25 = 3 \cdot (-8) - 3 + 3 - 1 = 3 \cdot (-9) + 2 \quad \Rightarrow \quad q = -9, \quad r = +2.$$

Ad cvičení 5.2. Proveďme Euklidův algoritmus pro hledání největšího společného dělitele:

$$\begin{aligned} 364 : 208 &= 1, \quad \text{zbytek } r_0 = 156; \\ 208 : 156 &= 1, \quad \text{zbytek } r_1 = 52; \\ 156 : 52 &= 3, \quad \text{zbytek } r_2 = 0. \end{aligned}$$

Tj. NSD je posledním nenulovým zbytkem, tj. jedná se o číslo 52.

Tentýž NSD jsou schopni studenti najít i rozkladem na prvočinitele:

$$\begin{aligned} 364 &= 2^2 \cdot 91 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13; \\ 208 &= 2^3 \cdot 26 = 2^4 \cdot 13. \end{aligned}$$

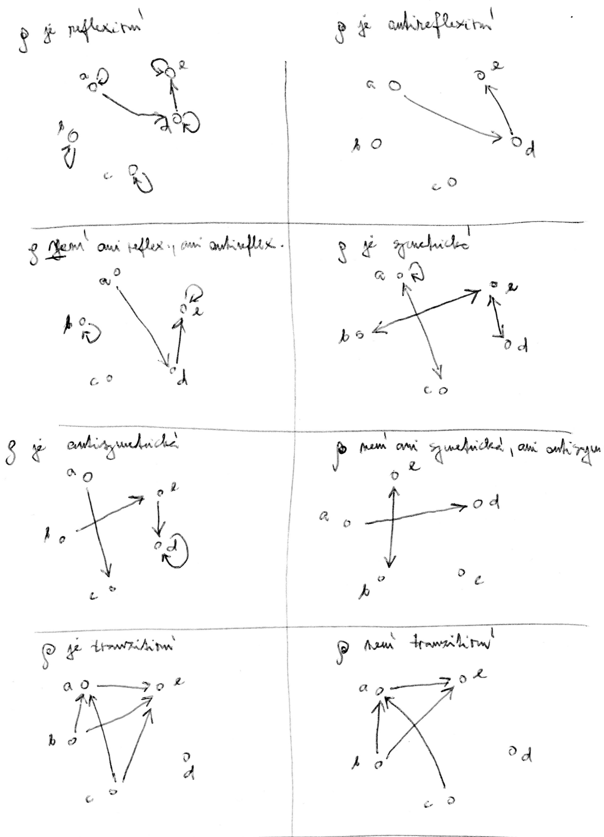
Tedy $NSD = 2^2 \cdot 13 = 52$ ... brali jsme součin všech mocnin prvočísel, které jsou děliteli obou z daných čísel.

14.6 Výsledky ke kapitole 6.2 – Binární relace a její vlastnosti

Ad Příklad 6.1.:

- reflexivní relace je reprezentována smyčkami u všech prvků (jedničkami na celé hlavní diagonále),
- antireflexivní relace nepřítomností smyček (nepřítomností jedniček na hlavní diagonále),
- symetrická relace má pro každou šipku též šipku v opačném směru,
- antisymetrická relace nemůže mít oboustranné šípky mezi dvěma různými prvky,
- tranzitivní relace musí pro např. šipku od a do b a od b do c obsahovat i šipku od a do c,
- úplná relace jednak obsahuje všechny smyčky, a pak pro každé dva různé prvky x, y vede šipka buď z x do y (tedy x je v relaci s y), nebo šipka z y do x, nebo obojí.

Ad Příklad 6.2.: Studentům by mělo být jasné, že např. antireflexivní ($anti - 12$) relace není negací relace reflexivní (11), ale úplným protipólem reflexivní relace – tj. že existují relace s nějakou smyčkou, které nejsou ani reflexivní, ani antireflexivní. Podobně u tranzitivní relace nemusí být všechny možné tranzitivní spoje prvky relace, ale jen ty, které jsou vynuceny šipkami v posloupnosti tří prvků (tj. $x\rho y$ a $y\rho z$ vynucují šipku $x\rho z$). Možná řešení viz obrázek:



Ad Příklad 6.3.: R je reflexivní (11) a tranzitivní (13). Je důležité si všimnout, že relace R není antisymetrická, protože například $3|(-3)$ a $(-3)|3$, ale odtud neplyne $3 = -3$. Není ani symetrická, protože pokud $3|6$, neplyne odtud, že $6|3$.

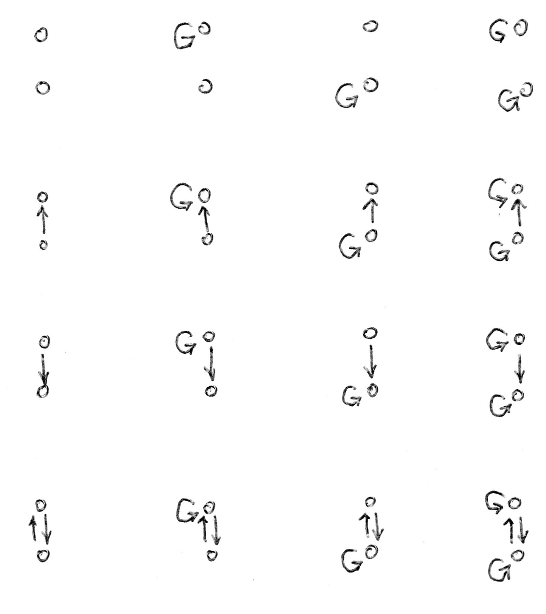
Ad Příklad 6.4.: ad a) může, ale jen relace, která je podmnožinou reflexivní relace, bez šipek mezi různými prvky; tedy jedná se o relaci, jejíž jediné prvky jsou nějaké smyčky (ne nutně všechny).

Ad Příklad 6.5.: ad a) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti - 12$) a tranzitivní (13).
ad b) R je reflexivní (11), symetrická (12) a tranzitivní (13).
ad c) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti - 12$) a tranzitivní (13).
ad d) R je pouze reflexivní (11), jinak nic rozumného nelze říci.

Ad cvičení 6.3.

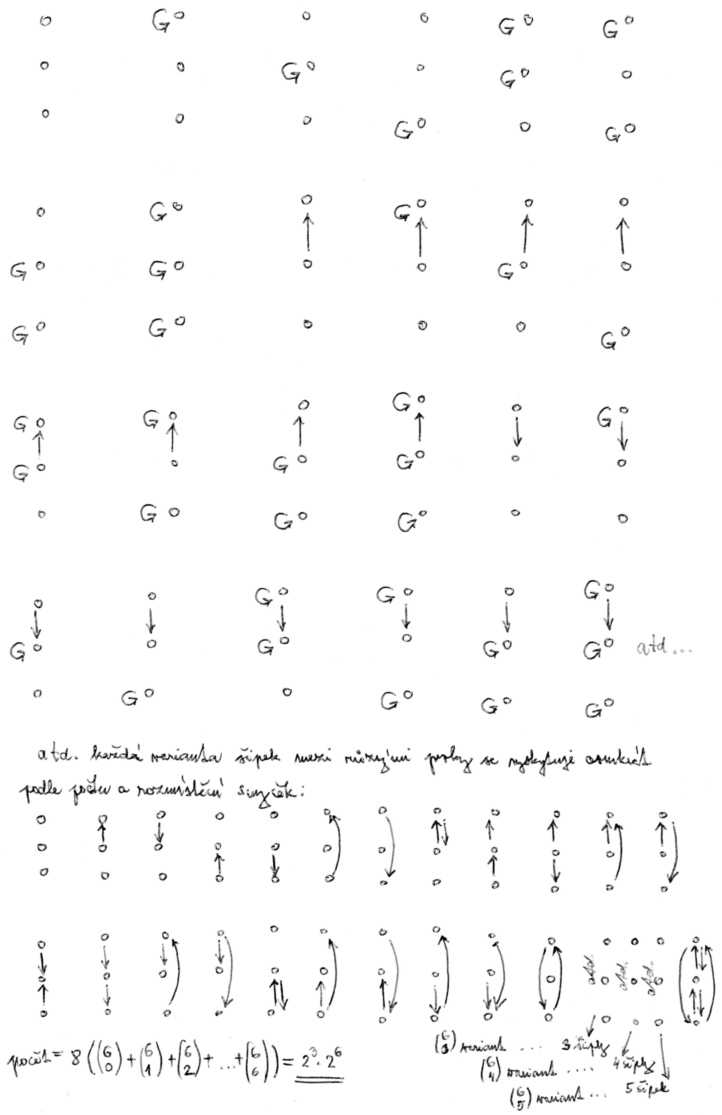
Ad a) Relace na jednoprvkové množině jsou dvě: prázdná relace a relace obsahující jednu smyčku jediného prvku do sebe sama.

Ad b) Relací navzájem různých na dvouprvkové množině je šestnáct – viz obrázek:



Rozbor obrázku: na dvouprvkové množině existují čtyři kombinace rozdělení smyček, tj. čtyřikrát se musí násobit jakákoli verze rozdělení šipek mezi různými prvky. Rozdělení šipek mezi různými prvky jsou čtyři, tj. celkový počet je dán součinem $4 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$ variant.

Ad c) Relací navzájem různých na tříprvkové množině je 512:



Rozbor obrázku: existuje osm rozdělení smyček, tj. počet různých rozdělení šipek mezi navzájem různými prvky se musí násobit osmi. Pro různá rozdělení variant šipek mezi různými prvky existuje

- jedna varianta bez šipek mezi různými prvky;
- šest variant jedné šipky mezi různými prvky;
- z šesti variant jedné šipky vybíráme dvě šipky, tj. variant se dvěma šipkama mezi různými prvky je $\binom{6}{2} = 15$ variant;
- variant se třemi šipkami existuje $\binom{6}{3}$;
- variant se čtyřmi šipkami existuje $\binom{6}{4}$;
- variant s pěti šipkami existuje $\binom{6}{5}$;
- variant se šesti šipkami existuje $\binom{6}{6}$.

Tedy celkem dostáváme

$$8 \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{6} \right) = 2^3 \cdot 2^6 = 512 \text{ variant.}$$

ad d) Můžeme se pokusit o hypotézu, kolik různých relací existuje na n-prvkové množině:

- Počet rozmístění smyček ... 2^n.
- Dále počet rozmístění šipek mezi různými prvky ... 2 na počet variant umístění jedné šipky mezi různými prvky.
- Jednu šipku umístíme kolika způsoby? Vybereme dva různé prvky $\binom{n}{2}$ způsoby, a vynásobíme dvěma. Jednu šipku mezi různé prvky tedy umístíme

$$\binom{n}{2} \cdot 2 = n(n-1) \quad \text{způsoby.}$$

- Celkem tedy máme: Počet relací na n-prvkové množině ... $2^n \cdot 2^{n(n-1)} = 2^{n+n^2-n} = 2^{n^2}$.

Ad cvičení 6.4. Například $\rho = \{[1;2],[2;1],[2;3],[3;2]\}$.

Ad cvičení 6.5. Například $\rho_1 = \{[1;2]\}$, $\rho_2\{[2;3]\}$ jsou obě tranzitivní (protože neporušují podmínku tranzitivity), ale jejich sjednocení tranzitivní není.

Ad cvičení 6.6. Například $\rho = \{[3;4],[4;3],[1;2]\}$ – porušuje podmínku symetrie i podmínku antisymetrie.

Ad cvičení 6.7. a) Relace | je antisymetrická na množině N. b) Relace | není antisymetrická na množině Z, protože z faktu, že $3|(-3) \ \wedge \ (-3)|3$ neplyne $3 = -3$.

Ad cvičení 6.8. Relace není reflexivní, protože např. $[2;2] \ \not in\rho$; není ani antireflexivní, protože $[1;1] \in \rho$. Není symetrická, protože např. $[2;4] \in \rho$, ale $[4;2] \notin \rho$. Antisymetrická je, protože neporušuje podmínku antisymetrie – jediná dvojice navzájem symetrických prvků je totiž $[1;1]$, a v ní se o navzájem různé prvky nejedná. Není tranzitivní, protože např. $[2;4] \in \rho$, $[4;16] \in \rho$, ale $[2;16] \notin \rho$. Není úplná, protože např. $[2;3] \notin \rho$ a současně ani $[3;2] \notin \rho$.

Ad cvičení 6.9. Vlastnost symetrie (12) relace ρ na množině M:

a) (12) symbolicky: $\forall x, y \in M : \ x\rho y \ \Rightarrow \ \neg(y\rho x)$;

b) Negace (12): $\exists x, y \in M : \ x\rho y \ \wedge \ \neg(y\rho x)$.

Ad cvičení 6.10 Vlastnost anti-(12) relace ρna množině M:

a) anti-(12) symbolicky: $\forall x, y \in M : \ x\rho y \ \wedge \ y\rho x \ \Rightarrow \ x = y$;

b) Negace anti-(12): $\exists x, y \in M : \ x\rho y \ \wedge \ y\rho x \ \wedge \ x \neq y$.

Ad cvičení 6.11. Negujte vlastnost (13) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že". Postup:

a) (13) symbolicky: $\forall x, y, z \in M : \ x\rho y \ \wedge \ y\rho z \ \Rightarrow \ x\rho z$.

b) Negace (13): $\exists x, y, z \in M : \ x\rho y \ \wedge \ y\rho z \ \wedge \ \neg(x\rho z)$.

Ad cvičení 6.12. Reflexivita (11): neplatí, protože např. $\{1; 2\}$ není v relaci se sebou samotnou.
Antireflexivita anti-(11): neplatí, protože celá množina A je v relaci se sebou samotnou.
Symetrie (12): platí, při sjednocení v podmínce relace nezáleží na pořadí množin.
Anti-(12): neplatí, např. $\{1; 2\}$ a $\{3; 4; 5\}$ jsou v relaci, a přitom se jedná o různé podmnožiny.
Tranzitivita (13): Neplatí, např. $\{1\}\rho\{2; 3; 4; 5\}$ a současně $\{2; 3; 4; 5\}\rho\{1; 2\}$, ale $\neg(\{1\}\rho\{1; 2\})$.
Úplnost (14): Neplatí, např. $\neg(\{1\}\rho\{1; 2\})$ a současně $\neg(\{1; 2\}\rho\{1\})$.

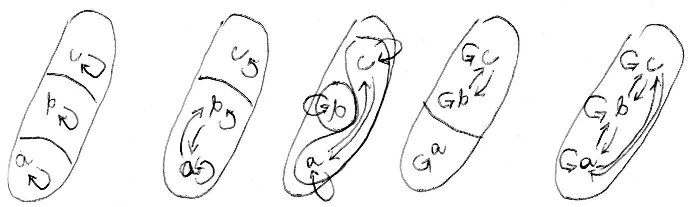
Ad cvičení 6.13. Jakákoli dvě lichá čísla jsou navzájem v relaci ρ_1. Liché číslo není v relaci se žádným sudým číslem, ani dvě sudá čísla nejsou nikdi v relaci. A proto tedy:
Reflexivita (11): Neplatí, protože např. $[2; 2] \notin \rho_1$.
Antireflexivita anti-(12): Neplatí, protože např. $[3; 3] \in \rho_1$. Symetrie (12): Platí, protože u součinu nezáleží na pořadí čísel.
Anti-(12): Neplatí, protože např. $[1; 3] \in \rho_1$ a $[3; 1] \in \rho_1$ a čísla 1 a 3 jsou navzájem různá.
Tranzitivita (13): Platí, vlastnost lichého výsledku se přenáší na součin jakýchkoli dvou lichých čísel.
Úplnost (14): Neplatí, např. $[2; 4] \notin \rho_1$ ani $[4; 2] \notin \rho_1$.

Ad cvičení 6.14. Vlastnosti relace u týmů, které hrají proti soupeři na domácím hřišti:
Reflexivita (11): Neplatí, týmy nehrají se sebou samotným v soutěžním zápase (i když na tréninku ano, ale to se nepočítá).
Antireflexivita anti-(11): Platí.
Symetrie (12): Platí, oba týmy hrají společně na domácím hřišti i na hřišti soupeře.
Anti-(12): Neplatí, ze symetrického vztahu neplyne, že tým hraje sám se sebou.
Tranzitivita (13): Ano, protože hraje každý s každým, tj. v relaci jsou obsaženy všechny uspořádané dvojice se dvěma různými týmy.
Úplnost (14): Podle definice pojmu vlastnosti (14) tato relace není úplná, protože úplnost, jak jsme ji definovali, zahrnuje i reflexivitu. Kdyby někdo definoval pojem úplné relace jen pro navzájem různé prvky, relace by úplná byla.

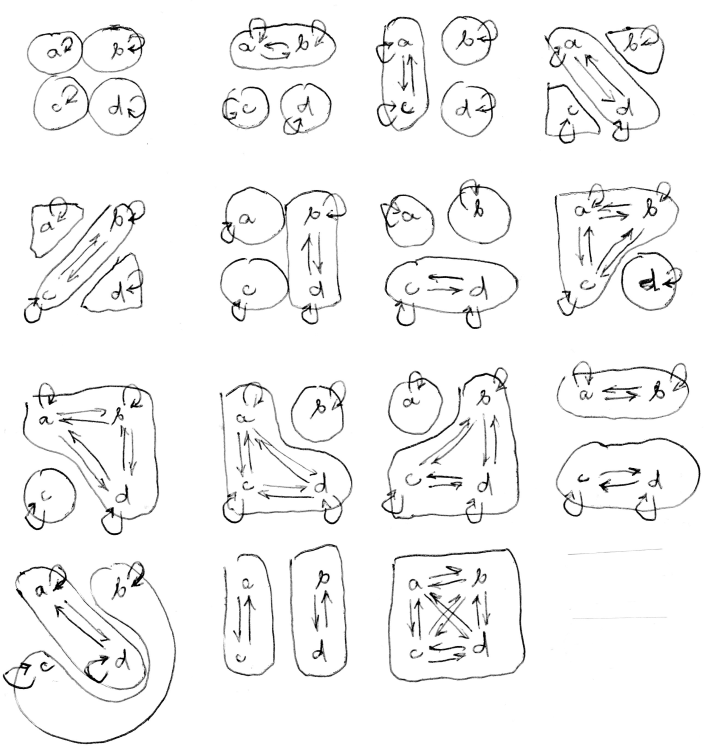
Ad cvičení 6.15. Viz odpovědi na otázky a výsledky na konci sbírky [17].

14.7 Výsledky ke kapitole 7.2 – ekvivalence a rozklady

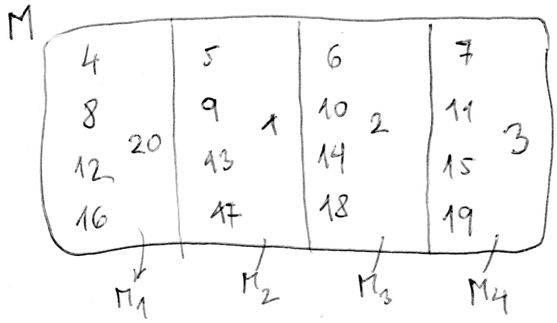
Ad Příklad 7.4. Relace jsou reprezentovány šipkovými grafy v obrázku množin:



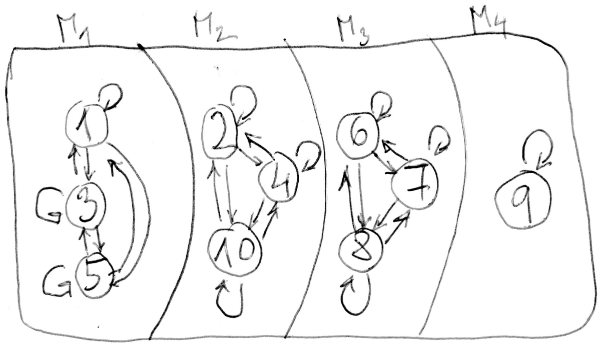
Ad Příklad 7.5. a) Možných rozkladů čtyřprvkové množiny na podmnožiny je patnáct. b) Relace ekvivalence je v každém množinovém rozkladu vyznačena soustavou šipek (šipkovým grafem). U ekvivalence určené rozkladem platí, že v relaci jsou všechny možné prvky v každé podmnožině rozkladu:



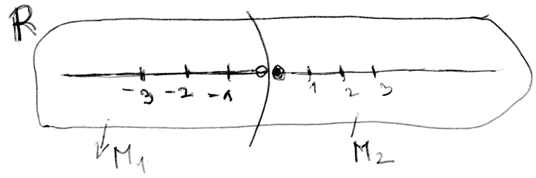
Ad cvičení 7.1. Faktormnožina má čtyři prvky – jsou jimi podmnožiny M_1, M_2, M_3, M_4, viz obrázek:



Ad cvičení 7.2. Relace ekvivalence je reprezentována šipkovým grafem. V relaci jsou všechny možné prvky v každé množině rozkladu:



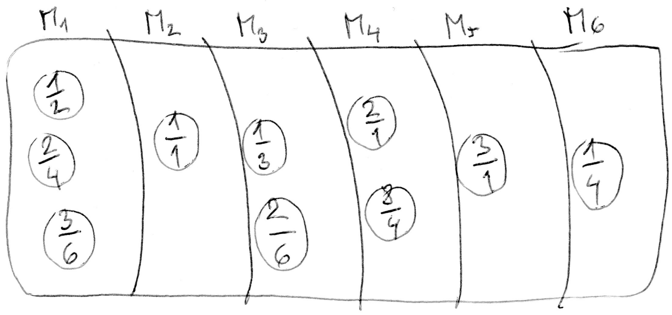
Ad cvičení 7.3. Rozkladu na dvě podmnožiny



Odpovídá relace ekvivalence na množině reálných čísel definovaná

$$\rho = \{[x; y] : (x < 0 \ \wedge \ y < 0) \ \vee \ (x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0)\}.$$

Ad cvičení 7.4. Ekvivalenci lze přirozeně definovat mezi těmi zlomky, které lze rozšířit či zkrátit jeden na druhý. Faktormnožina podle této ekvivalence má šest prvků – množiny M_1, M_2, ..., M_6. Viz obrázek:



Ad cvičení 7.5. Chceme rozdělit rozkladem reálná čísla na dvě podmnožiny – například na čísla záporná a čísla nezáporná. V každé podmnožině musí být v relaci ekvivalence každý prvek s každým prvkem. Tedy můžeme třeba i využít zkrácený zápis:

$$\rho = \{[x; y] \in R^2 \ : \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0) \ \vee \ (x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0)\}.$$

Uvedené řešení je jedno z možných řešení – rozdělit množinu do dvou podmnožin lze provést mnoha způsoby (nekonečně mnoha způsoby).

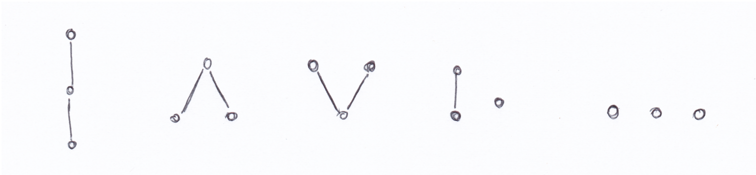
Ad cvičení 7.6. Výsledky viz sbírka [17], ke konci textu.

14.8 Výsledky ke kapitole 8.2 – Uspořádané množiny, maximální prvek, největší prvek a supremum

Ad Příklad 8.1: Relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní – takže je to podle definice, která bude následovat, uspořádání!!

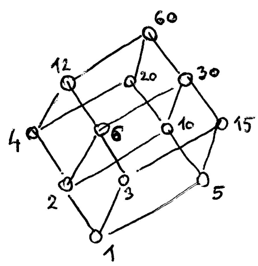
Ad Příklad 8.3: Daný Hasseův diagram je na obrázku 13 (b).

Ad Příklad 8.4: Neizomorfních posetů na tříprvkové množině je pět – viz obrázek 22:



Obrázek 22: Všechny navzájem různé (až na přeznačení prvků) tříprvkové posety.

Ad Příklad 8.7: Všech přirozených dělitelů čísla 60 je dvanáct, jejich uspořádání do posetu vytváří něco jako „dva kvádry nad sebou“, pokud je spojíme úhledně – viz obrázek:



Ad Příklad 8.9: ad a) $\sup\{a, d\} = c$, $\sup\{e, f\} = e$.
ad b) $\sup M$ neexistuje, protože množina horních závor $\{b, c, d\}$ nemá nejmenší prvek.

Ad cvičení 8.1: i)

$$\trianglelefteq_a = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

$$\trianglelefteq_b = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

ii)

$$\triangleleft_a = \{[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

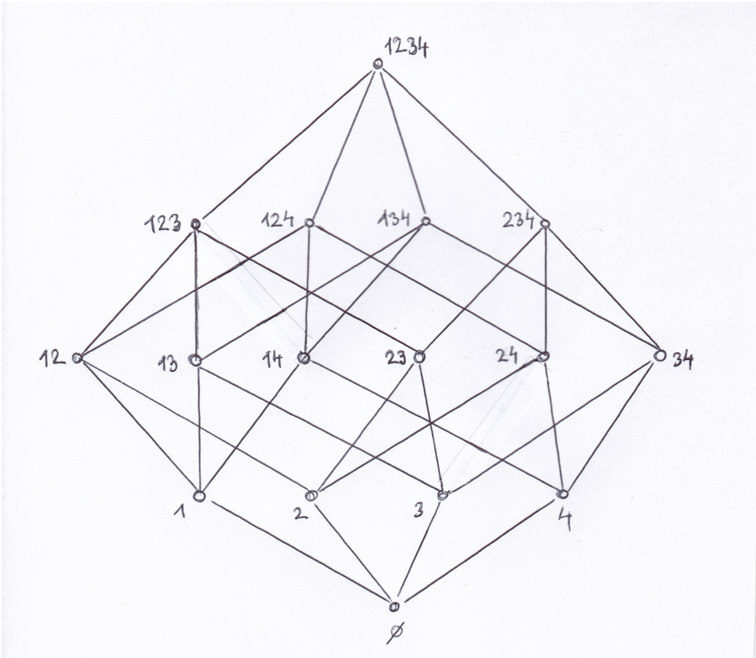
$$\triangleleft_b = \{[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

iii)

$$\prec_a = \{[1,2],[2,3],[1,4],[4,3]\};$$

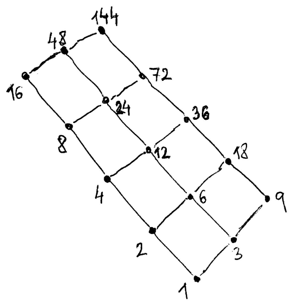
$$\prec_b = \{[3,4],[4,1],[4,2]\}.$$

Ad cvičení 8.2: Jedná se o poset zobrazený na titulní straně textu [14]: obrázek 23.

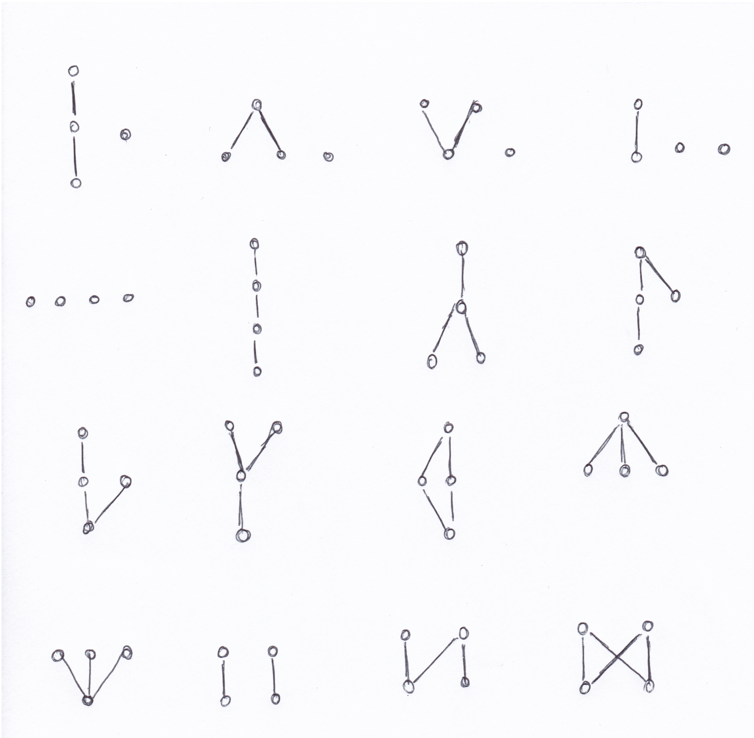


Obrázek 23: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1, 2, 3, 4\}$.

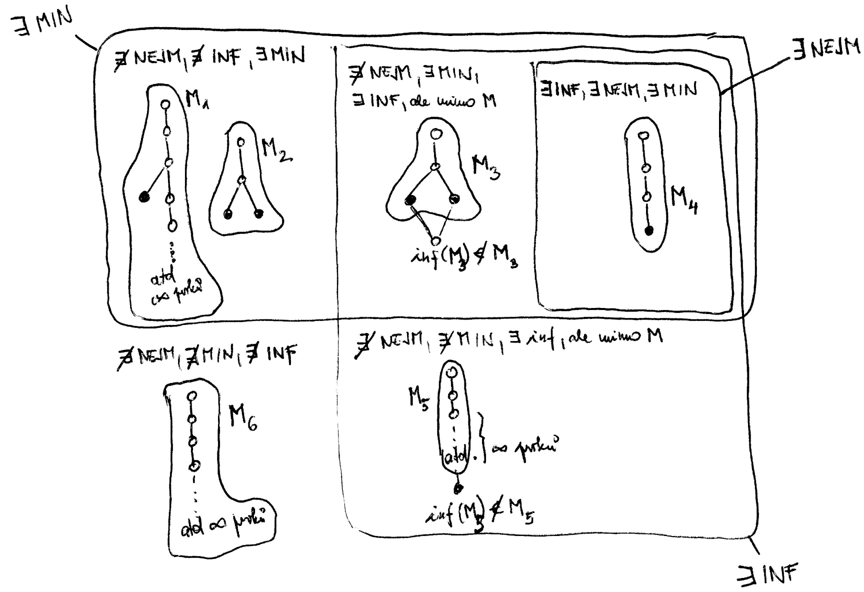
Ad cvičení 8.3.



Ad cvičení 8.4. Navzájem různých posetů (až na přeznačení prvků) na čtyřprvkové množině je šestnáct – viz obrázek:



Ad cvičení 8.5. Vzájemné souvislosti mezi minimálním prvkem, nejmenším prvkem a infimem jsou vymezeny na obrázku:



Z osmi variant kombinace prvků „MIN“, „NEJM“, „INF“, kdy dané prvky existují či neexistují, tři varianty vůbec nemohou nastat:

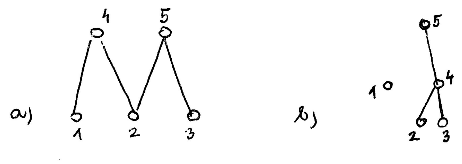
a) nenastane ∄ MIN, ∃ NEJM, ∃ INF;

b) nenastane ∃ MIN, ∃ NEJM, ∄ INF;

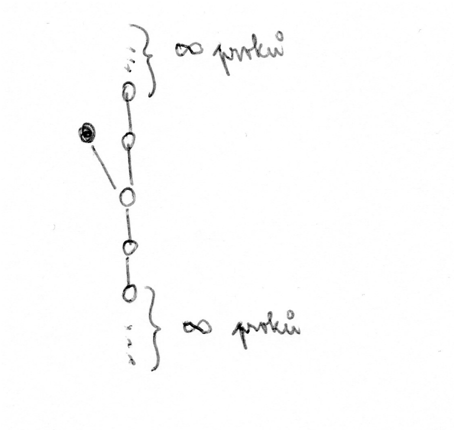
c) nenastane ∄ MIN, ∃ NEJM, ∄ INF.

Dalších pět kombinací by s trochou fantazie (viz obrázek) mohlo obsahovat posety daného typu.

Ad cvičení 8.6. Viz obrázek – dva možné příklady. Poset (b) má skutečně tři minimální a dva maximální prvky, protože nesrovnatelný prvek je jak prvkem maximálním, tak prvkem minimálním.

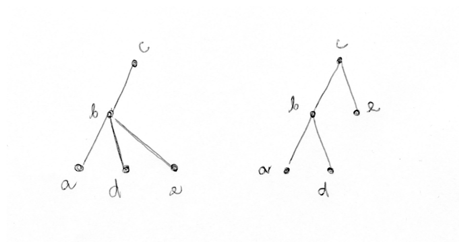


Ad cvičení 8.7. Viz obrázek:



Ad cvičení 8.8. Například oba posety ve cvičení 8.6 – třeba prvky 1, 2, 3 jsou navzájem nesrovnatelné, tj. žádný není menší nebo roven než ty druhé dva.

Ad cvičení 8.9. Oba posety na obrázku – prvky a, d, e jsou navzájem nesrovnatelné, žádný není menší nebo roven než ty další dva:



Ad cvičení 8.10.

a) $\ldots \forall x \in M :\ x \leq x_0.$

b) $\ldots \exists x \in M :\ (x > x_0 \ \vee\ x \not\leq x_0).$

Ad cvičení 8.11.

ad a) Hasseův diagram je schéma, které zachycuje relaci uspořádání. Vztah $[x, y]$ relace je v něm zachycen tak, že existuje posloupnost bezprostředních předchůdců a následovníků, že

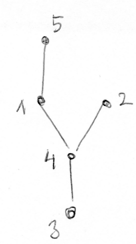
$$x \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec y.$$

Přitom uspořádanost dvojice je zachycena tím, že první prvek ve dvojici je nakreslen níže než druhý prvek ... díky této úmluvě se šipky nekreslí, protože všechny by směřovaly směrem nahoru.

Zachycení vlastností uspořádání: (11) ... smyčky se nekreslí a rozumí se, že všechny prvky jsou v relaci se sebou automaticky;
anti-(12): nemohou být spojeny hranou dva prvky v diagramu vedle sebe – to by znamenalo, že jsou navzájem v relaci, a přitom jsou různé, tj. byla by porušena podmínka anti-(12);
(13): Pokud $a \trianglelefteq b \wedge b \trianglelefteq c$ tak se má za to, že automaticky platí $a \trianglelefteq c$, ovšem hrana $a \to c$ se nesmí kreslit. Jakmile jsou některé dva prvky spojeny řetězcem bezprostředních předchůdců a následovníků, jsou (v daném pořadí: nižší prvek s vyšším prvkem) v relaci, i když diagram je nespojuje hranou.

ad b) Tento diagram je téměř stejný jako ten ze cvičení 8.3, ovšem není v něm zakreslena horní řada prvků z 8.3, tj. čísla 16, 48, 144.

Ad cvičení 8.12. Ano, jedná se o poset, viz obrázek:



Ad cvičení 8.13.

a) Na posetu $(P, \trianglelefteq)$ uvažujme neprázdnou podmnožinu M. Číslo m je infimum množiny M v tomto posetu, když je největší dolní závorou množiny M.

b) Největší dolní závorou je největší společný dělitel daných čísel z množiny M, nejmenší horní závorou je nejmenší splečný násobek těchto čísel. Tedy $\inf\{8, 12, 30\} = 2$ a $\sup\{8, 12, 30\} = 120$.

Ad cvičení 8.14. Viz výsledky na konci textu [17].

14.9 Výsledky ke kapitole 9.2 – Zobrazení, funkce, posloupnost, operace

Ad cvičení 9.4. Viz obrázek v definici 52e).

Ad cvičení 9.5. Viz obrázek v definice 52d).

Ad cvičení 9.6. ad a) Viz definice 53; ad b) $g \circ f(x) = \sqrt{\sin x}$.

Ad cvičení 9.7. ad a) viz definice 52; ad b) $h \circ g \circ f(x) = \frac{1}{(2^x+1)^2}$.

Ad cvičení 9.8. Porovnejte své odpovědi s definicemi jednotlivých typů zobrazení. Zaměřte se také na to, zda každý příklad zobrazení je nebo není zobrazením více typů současně. Zdůvodňete proč se jedná o daný typ.

Ad cvičení 9.9. Definujeme příklad zobrazení $f : Z \to N$, které je injektivní, ale ne surjektivní. Řešení zde existuje celá řada, popišme jen jedno z nich (je výhodou si celou situaci kreslit):

- Nemá se jednat o surjekci, tak nechejme třeba čísla 1 a 2 neobsazená žádným vzorem.
- Nulu v Z zobrazíme například na trojku v N: $f(0) = 3$.
- Zdá se, že zobrazit dvě nekonečné množiny (množinu kladných celých čísel a množinu záporných celých čísel) na jednu nekonečnou množinu není možné, ale zobrazení je možné zkonstruovat díky paradoxům, které platí u nekonečných množin: množinu $\{4, 5, 6, \ldots\}$ lze totiž rozdělit na dvě nekonečné podmnožiny, například na podmnožinu jejích sudých čísel a podmnožinu jejích lichých čísel:

  $$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\} = \{4, 6, 8, \ldots\} \cup \{5, 7, 9, \ldots\}.$$

  To nám už napovídá, jakým způsobem definujeme hledané zobrazení f:

  - Kladná celá čísla zobrazíme injektivně na množinu $\{4, 6, 8, \ldots\}$: $f(1) = 4$, $f(2) = 6$, $f(3) = 8$, $f(4) = 10$, atd.
  - Záporná celá čísla zobrazíme injektivně na množinu $\{5, 7, 9, \ldots\}$: $f(-1) = 5$, $f(-2) = 7$, $f(-3) = 9$, $f(-4) = 11$, atd.

Zobrazení f jsme tedy zkonstruovali tak, že žádné dva obrazy nejsou stejné (tj. jedná se o injekci), a přitom čísla 1, 2 v množině N nejsou obsazena žádným vzorem (NEjedná se o surjekci).

Ad cvičení 9.10. Definujme příklad zobrazení $f : R \to Z$, které je surjektivní, ale ne injektivní. Řešení existuje celá řada, popíšeme jedno z nich (je výhodné si celou situaci kreslit):

- Má se jednat o surjekci, tak pokryjme nejprve celou množinu Z obrazy bodů z R – můžeme vzít třeba velmi jednoduchý předpis $f(k) = k$ pro všechna $k \in Z$. Už nyní víme, že f bude surjekce.

- Nyní zbývá dodefinovat zobrazení f pro ta reálná čísla, která nejsou celá. Musíme to ovšem udělat takovým způsobem, aby všechny obrazy byly celočíselné. Vezměme například $f(x) = k$ pro každé x z intervalu $(k; k+1)$.

Zobrazení f je definováno tak, že pro každé celočíselné k se celý interval $\langle k; k+1)$ zobrazí na celé číslo k. Jinými slovy, f není injekce, protože různá x z intervalu $\langle k; k+1$ se zobrazují na stejné celé číslo.

Ad cvičení 9.11. Definujme příklad zobrazení $f : N \to Z$, které je bijektivní.Řešení existuje celá řada, popíšeme jedno z nich (je výhodné si celou situaci kreslit):

- Nejprve pokryjeme nulu, například jedničkou: $f(1) = 0$.
- Dále pokryjme záporná čísla, kterých je nekonečně mnoho: pokryjeme je sudými přirozenými čísly, kterých je také nekonečně mnoho!!! $f(2) = -1$, $f(4) = -2$, $f(6) = -3$, $f(8) = -4$, atd. obecně $f(k) = -\frac{k}{2}$ pro sudá k.
- A zbývá pokrýt kladná celá čísla, kterých je také nekonečně mnoho. Nám ovšem ještě nekonečně mnoho neobsazených vzorů zbývá, tj. $f(3) = 1$, $f(5) = 2$, $f(7) = 3$, $f(9) = 4$, atd. obecně $f(l) = \frac{l-1}{2}$ pro lichá $l \geq 3$.

Takto definované zobrazení je konstruováno tak, aby pokrylo všechna celá čísla (tj. je surjekce), a současně $Df = N$ a f nenabývá dvou stejných hodnot (tj. je injekce). Dohromady je tedy bijekcí.

Ad cvičení 9.12. Výsledky na konci učebnic [8], [17]. V případě nejasného vysvětlení kontaktujte svého cvičícího.

14.10 Týden 10 – přednáška a cvičení

14.10.1 Výsledky ke kapitolce 10.2 – Vlastnosti funkce – shrnutí

Ad cvičení 10.1. Definice v těchto odpovědích nemusí být zcela totožné s definicemi v textu.

ad a) Relace f je zobrazení z X do Y, když ...

$$\forall x \in X \; \exists \text{ nejvýše jedno } y \in Y \;:\; [x; y] \in f.$$

ad b) Relace f není zobrazení z X do Y, když ...

$$\exists x \in X, y, z \in Y \;:\; [x; y] \in f \;\wedge\; [x; z] \in f \;\wedge\; y \neq z.$$

ad c) Funkce f je rostoucí na intervalu I, když ...

$$\forall x_1, x_2 \in I \;:\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2).$$

ad d) Funkce f není rostoucí na intervalu I, když ...

$$\exists x_1, x_2 \in I \;: x_1 < x_2 \;\wedge\; f(x_1) \geq f(x_2).$$

ad e) Funkce f je klesající na intervalu I, když ...

$$\forall x_1, x_2 \in I \;:\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

ad f) Funkce f není klesající na intervalu I, když ...

$$\exists x_1, x_2 \in I \;: x_1 < x_2 \;\wedge\; f(x_1) \leq f(x_2).$$

ad g) Reálné číslo x_0 je lokální minimum funkce f, když ...

$$\exists (a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b) \;\wedge\; f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (a; b).$$

ad h) Reálné číslo x_0 není lokální minimum funkce f, když ...

$$\forall ((a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b)) \exists x_1 \in (a; b) \;:\; f(x_0) > f(x_1)$$

(slovně: x_0 není lokálním minimem funkce f, když pro jakýkoli interval $(a; b)$, který obsahuje bod x_0, leží v tomto intervalu nějaký bod x_1 s nižší funkční hodnotou $f(x_1) < f(x_0)$).

ad i) Reálné číslo x_0 je lokální maximum funkce f, když ...

$$\exists (a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b) \;\wedge\; f(x_0) \geq f(x) \forall x \in (a; b).$$

ad j) Reálné číslo x_0 není lokální maximum funkce f, když ...

$$\forall ((a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b)) \exists x_1 \in (a; b) \;:\; f(x_0) < f(x_1)$$

(slovně: x_0 není lokálním maximem funkce f, když pro jakýkoli interval $(a; b)$, který obsahuje bod x_0, leží v tomto intervalu nějaký bod x_1 s vyšší funkční hodnotou $f(x_1) > f(x_0)$).

ad k) Funkce f je sudá, když ...

$$\forall x \in D(f) \ : \ (-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) = f(x).$$

ad l) Funkce f není sudá, když ...

$$\exists x \in D(f) \ : \ (-x) \notin D(f) \ \vee \ ((-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) \neq f(x).$$

ad m) Funkce f je lichá, když ...

$$\forall x \in D(f) \ : \ (-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) = -f(x).$$

ad n) Funkce f není lichá, když ...

$$\exists x \in D(f) \ : \ (-x) \notin D(f) \ \vee \ ((-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) \neq -f(x).$$

ad o) Funkce f je shora ohraničená, když ...

$$\exists \ L \in R \ : \ \forall x \in D(f) : \ f(x) \leq L.$$

ad p) Funkce f není shora ohraničená, když ...

$$\forall L \in R \ \exists \ x \in D(f) \ : \ f(x) > L$$

(slovně: funkce f přesáhne v některém bodě jakoukoli konstantu L, ať je jakkoli velká).

Cvičení 10.2. Příklady sudé funkce: $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$.

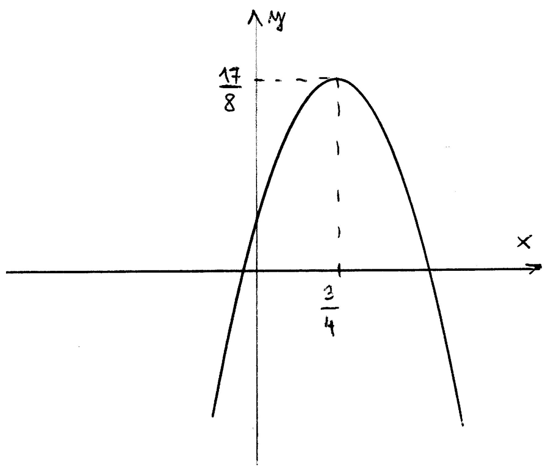
Cvičení 10.3. Příklady liché funkce: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \mathrm{tg}\ x$, $f(x) = \mathrm{cotg}\ x$, $f(x) = x^3$.

14.10.2 Výsledky ke kapitole 10.3 – Lineární a kvadratické funkce, funkce s absolutní hodnotou

Ad cvičení 10.4. Při úpravě předpisu kvadratické funkce $y = -2x^2 + 3x + 1$ nejprve vytkneme -2, aby u člene x^2 v závorce byl koeficient 1, a pak vnitřek závorky doplníme na úplný čtverec (přičteme a odečteme číslo $\frac{9}{16}$, aby se výsledek nezměnil, ale mohli jsme pro první tři členy v závorce použít vzorec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$):

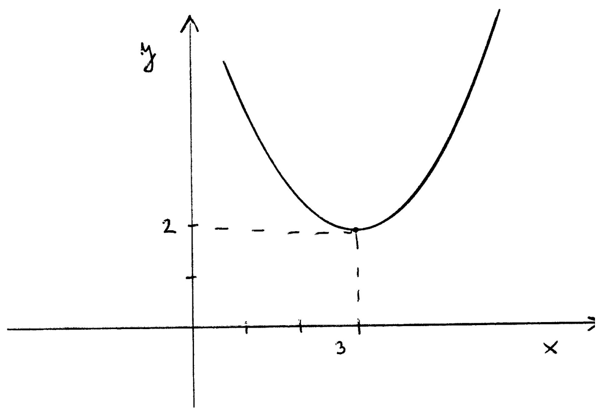
$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x + 1 &= -2 \cdot (x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) = -2 \cdot \left(\left[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16} \right] - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= -2 \cdot \left(\left[x - \frac{3}{4} \right]^2 - \frac{17}{16} \right) = \underline{\underline{-2 \cdot \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{17}{8}}}. \end{aligned}$$

Z upraveného tvaru je vidět: -2 znamená, že funkce bude nabývat neohraničeně záporných funkčních hodnot (tj. její graf parabola bude otočená směrem k minus nekonečnu na svislé ose), z dalších hodnot vyčteme, že vrchol paraboly nastává v bodě $\left[\frac{3}{4}; \frac{17}{8}\right]$.



Z grafu funkce vidíme, že $Df = R$, $Hf = (-\infty; \frac{17}{8}\rangle$.

Ad cvičení 10.5. Z vymezujících množin $Df = R$, $Hf = \langle 2; \infty)$ vidíme, že parabola bude tentokrát otočená k plus nekonečnu na svislé ose. Vrchol nastává pro $x = 3$, má tedy souřadnice $[3; 2]$.



Můžeme psát předpis ve tvaru

$$f(x) = (x - 3)^2 + 2.$$

Tento vzorec není určen jednoznačně, protože v zadání úlohy není uvedeno, jak moc má být parabola sevřená-rozevřená kolem své osy. Koeficient před závorkou nemusí být roven jedné, ale jakékoli nenulové kladné reálné hodnotě. Předpisy $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 3)^2 + 2$, $f(x) = 5 \cdot (x - 3)^2 + 2$, atd. jsou všechny odpovědí na zadání úlohy. Možná bychom mohli psát $f(x) = a \cdot (x - 3)^2 + 2$, kde $a \in R^+$.

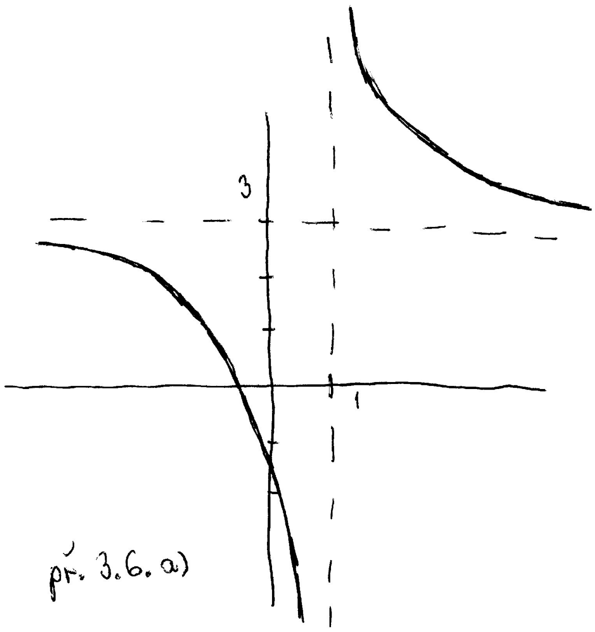
14.11 Výsledky ke kapitole 11.2 – Lineárně lomené funkce, funkce mocninné a odmocninné

Ad cvičení 11.4. Výsledky příkladů na lineárně lomenou funkci:

a) Abychom získali základní tvar vyjádření funkce $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, provedeme dělení polynomů:

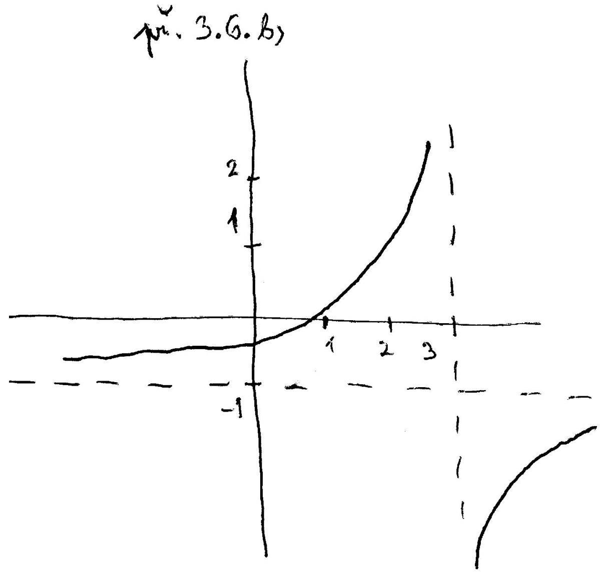
$$(3x+2) : (x-1) = 3 + \frac{5}{x-1}.$$

Odtud už je vidět, že svislá osa je posunuta do přímky $x = 1$ a vodorovná do přímky $y = 3$, a tedy můžeme kreslit posunutý graf:



Dále $Df = R - \{1\}$, $Hf = R - \{3\}$.

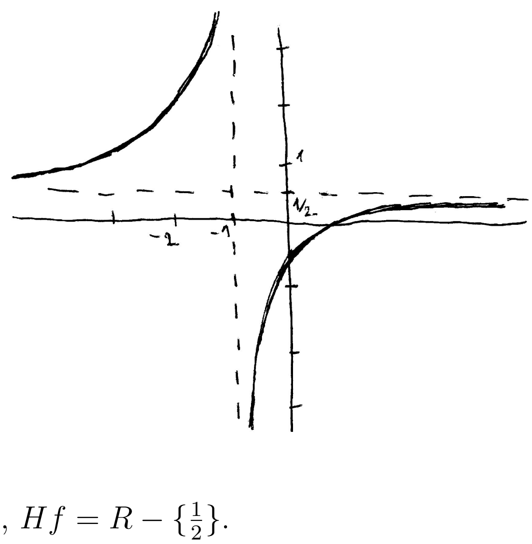
b) Z $Df = R \setminus \{3\}$ plyne, že svislá osa je posunutá do přímky $x = 3$. Z $Hf = R \setminus \{-1\}$ plyne, že vodorovná osa je posunuta do přímky $y = -1$. Dále protože funkce je pro $x > 3$ rostoucí, její graf leží v posunutém druhém a čtvrtém kvadrantu, což lze zařídit znaménkem MINUS v čitateli zlomku ze základního tvaru. Tomu odpovídá např. funkce $f(x) = -1 - \frac{1}{x-3}$, nebo $f(x) = -1 - \frac{2}{x-3}$, zkrátka každá funkce typu $f(x) = -1 - \frac{a}{x-3}$, kde $a \in R^+$:



c) Děláme podobně jako (a): Provedeme dělení polynomů

$$(x-1):(2x+2)=\frac{1}{2}-\frac{2}{2x+2}.$$

Odtud už je vidět, že svislá osa je posunutá do přímky $x=-1$ (je to ta hodnota proměnné x, pro kterou $2x+2$ je rovno nule) a vodorovná osa je posunuta do přímky $y=\frac{1}{2}$. Graf kreslíme do druhého a čtvrtého posunutého kvadrantu, což plyne ze znaménka MINUS před zlomkem základního tvaru (to vlastně znamená, že -2 se nachází v čitateli zlomku):



Dále $Df=R-\{-1\}$, $Hf=R-\{\frac{1}{2}\}$.

Ad cvičení 11.10. Jedná se o podobnou funkci jako je $y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ na zúženém definičním oboru, jenže graf zadané funkce je oproti této funkci posunutý o dvě jednotky doprava a tři jednotky nahoru.

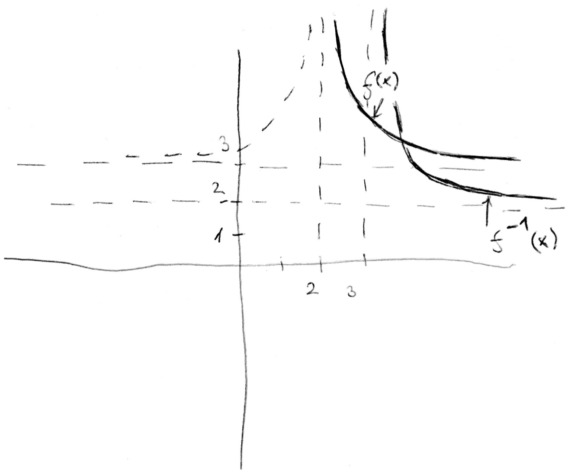
ad a) Graf funkce $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+3$ pro $x\in(2;\infty)$: viz obrázek níže.

ad b) Nejprve zaměníme x a y ve vzorci: $x = \frac{1}{(y-2)^2} + 3$, a pak z něj vyjádříme y:

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{x-3}} + 2.$$

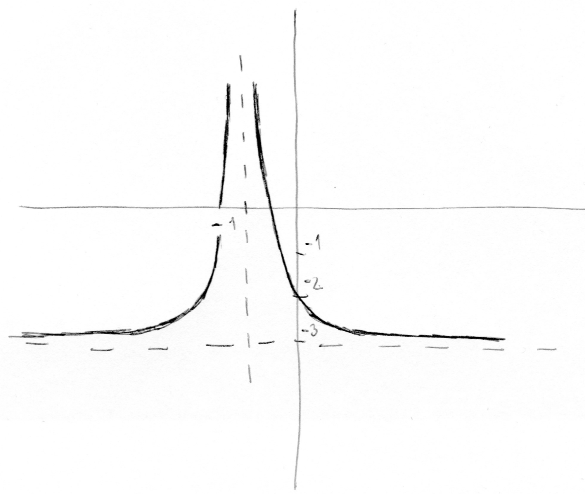
Zůstává otázkou, jaké znaménko zvolit na místě $\pm$. Pomůže nám, že definiční obor funkce $f(x)$ obsahoval pouze kladná čísla (větší než 2) – tj. obor hodnot Hf^{-1} bude také obsahovat pouze kladná čísla (větší než 2). Tj. v čitateli zlomku volíme znaménko PLUS a hledaná funkce je tvaru $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + 2$.

Grafy obou funkcí viz obrázek:



Cvičení 11.11.

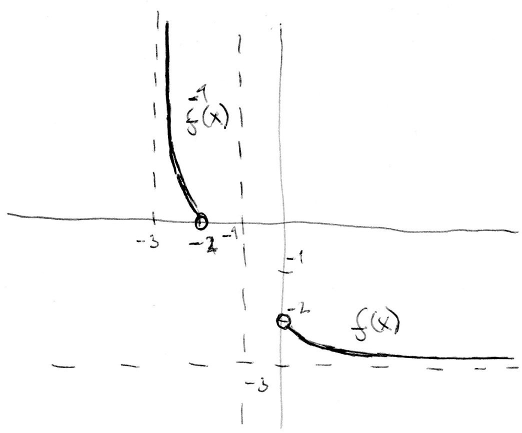
a) $Df = R - \{-1\}$, $Hf = R - \{-3\}$, graf funkce viz obrázek:



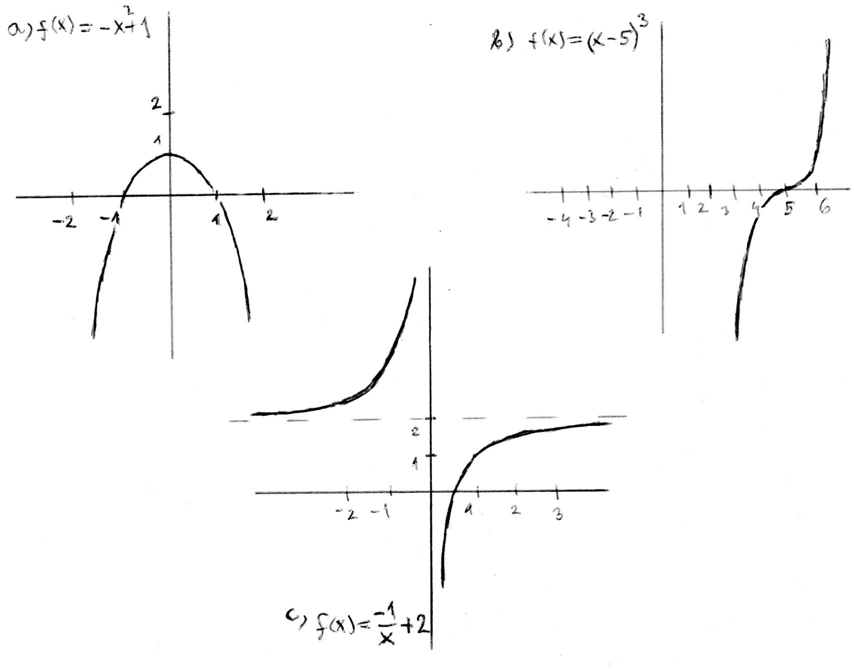
b) Nejprve zaměníme x a y ve vzorci: $x = \frac{1}{(y+1)^2} - 3$, a pak z něj vyjádříme y:

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{x+3}} - 1.$$

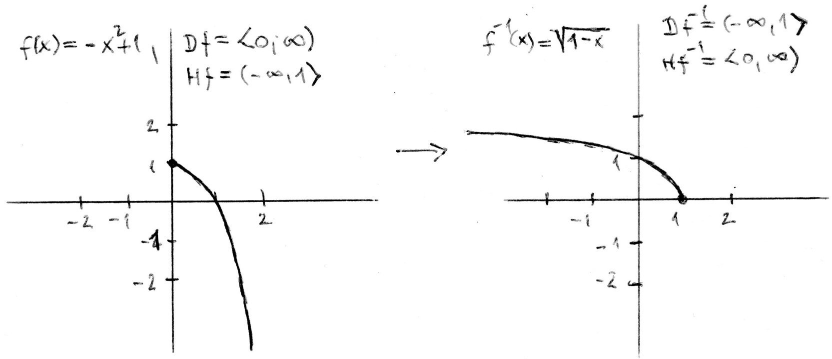
Zůstává otázkou, jaké znaménko zvolit na místě $\pm$. Pomůže nám, že definiční obor funkce $f(x)$ obsahoval pouze kladná čísla – tj. obor hodnot Hf^{-1} bude také obsahovat pouze kladná čísla. Tj. v čitateli zlomku volíme znaménko PLUS a hledaná funkce je tvaru $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - 1$. Graf obou funkcí viz obrázek:



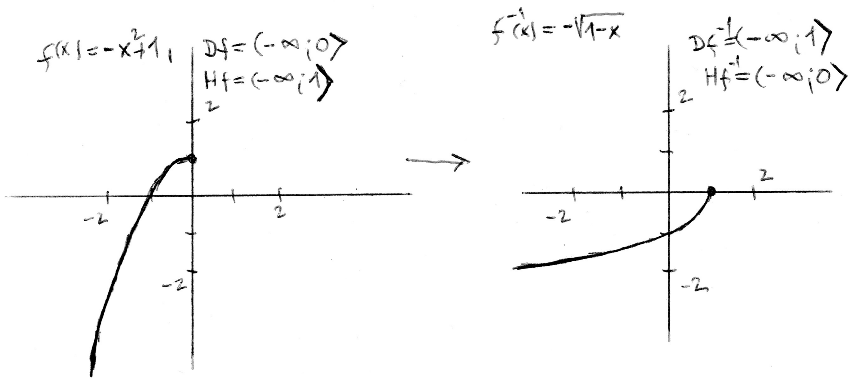
Ad cvičení 11.12. Grafy funkcí a) $f(x) = -x^2+1$, b) $f(x) = (x-5)^3$, c) $f(x) = \frac{-1}{x}+2$ jsou na obrázku:



ad a) $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty; 1\rangle$ a příslušná inverzní funkce f^{-1} neexistuje, protože funkce f není prostá. Eventuálně bychom se mohli se zadáním funkce omezit na nezáporná x, na tomto zúženém intervalu už funkce f prostá je a inverzi najdeme včetně grafu:

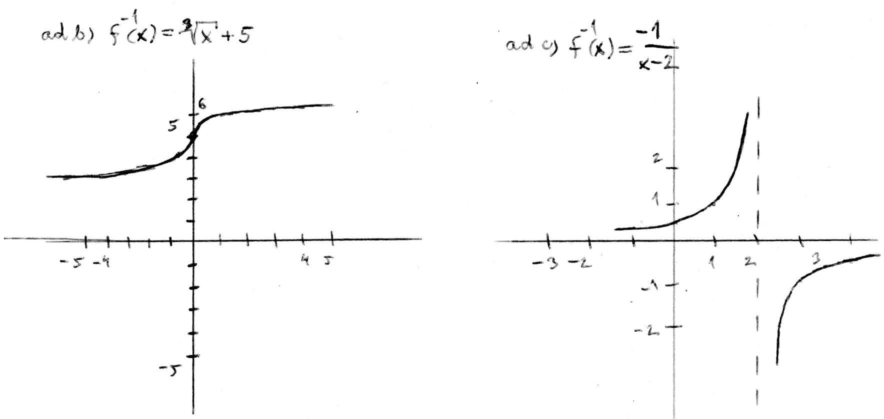


Nebo se můžeme omezit na nekladná x – pro takto zúžený definiční obor také inverzní funkce existuje, viz grafy:

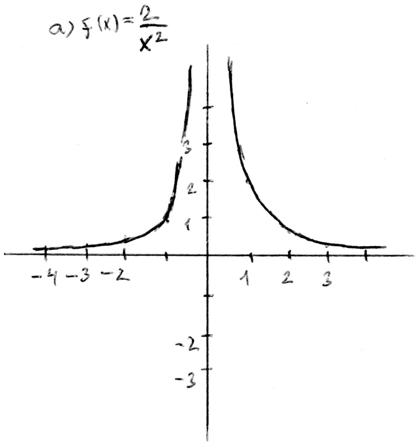


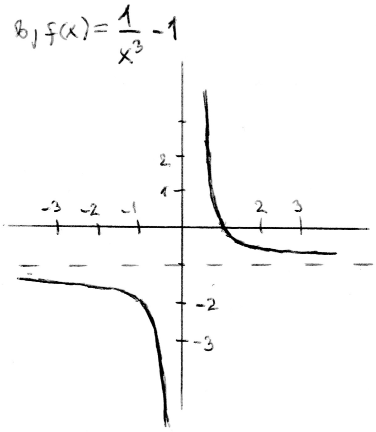
ad b) $D(f) = R$, $H(f) = R$ a inverze existuje, protože f je funkce prostá – viz obrázek níže.

ad c) $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{2\}$ a inverze existuje, protože f je funkce prostá – viz obrázek:

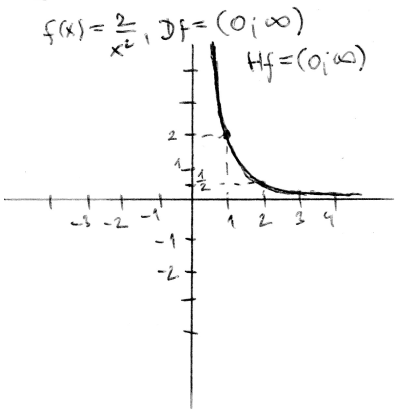


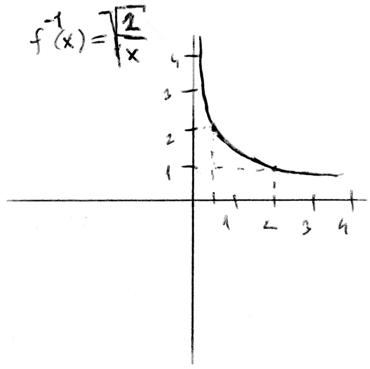
Ad cvičení 11.13. Grafy funkcí a) $f(x) = 2x^{-2}$, b) $f(x) = x^{-3} - 1$ jsou na obrázku:



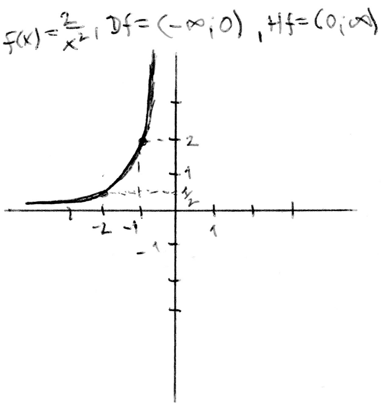


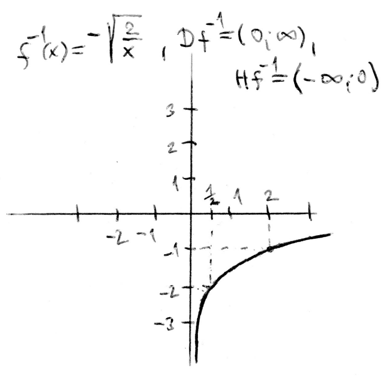
ad a) $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = \langle 0; \infty)$ a příslušná inverzní funkce f^{-1} neexistuje, protože funkce f není prostá. Eventuálně bychom se mohli se zadáním funkce omezit na kladná x, na tomto zúženém intervalu už funkce f prostá je a inverzi najdeme včetně grafu:



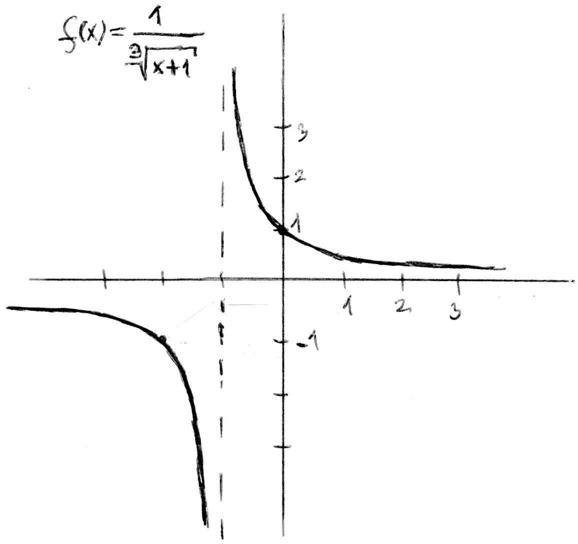


Nebo se můžeme omezit na záporná x – pro takto zúžený definiční obor také inverzní funkce existuje, viz grafy:

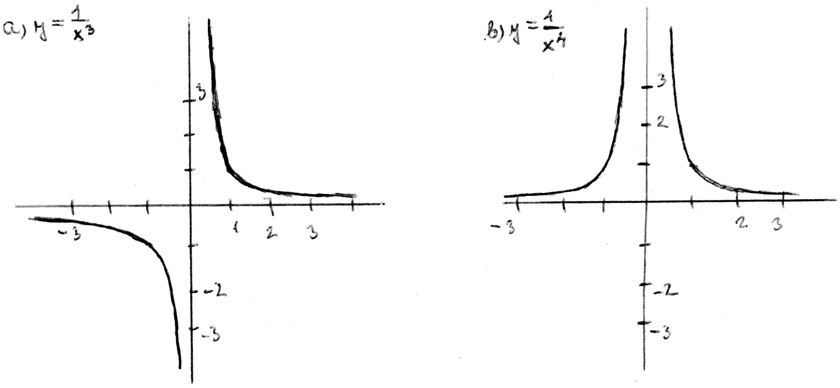




ad b) $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{-1\}$ a inverze existuje, protože f je funkce prostá – viz obrázek:



Ad cvičení 11.14. Grafy funkcí a) $y = x^{-3}$, b) $y = x^{-4}$ jsou na obrázku:



ad a) Na intervalu $(-\infty; 0)$ funkce f nemá minimum, protože není zdola ohraničená. Platí totiž

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

(čteme: limita z funkce $\frac{1}{x^3}$ pro x blížící se k nule zleva se rovná minus nekonečnu). Na intervalu $(0; \infty)$ ovšem minimum také neexistuje – funkční hodnoty pro x jdoucí k nekonečnu se sice limitně blíží k nule, tj.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0,$$

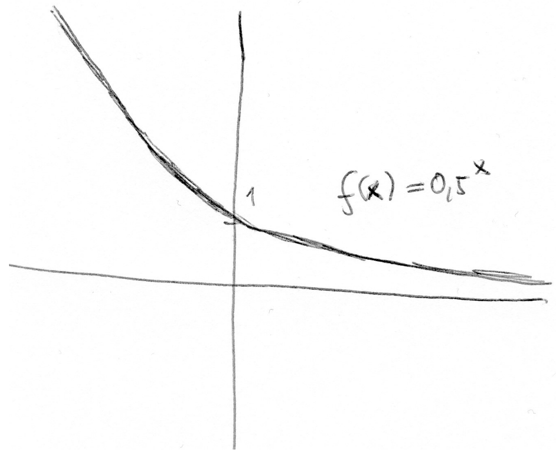
ovšem funkce f této funkční hodnoty nenabývá v žádném konečném bodě. Použitím terminologie z kapitoly 8 říkáme, že množina funkčních hodnot funkce f má pro x z intervalu $(0; \infty)$ infimum (rovné nule), nikoli minimum.

ad b) Funkce $f(x) = \frac{1}{x^4}$ nemá v žádném bodě svého definičního oboru minimum – pouze je množina $H(f)$ ohraničená a má infimum, ale minimum funkce f neexistuje v žádném bodě definičního oboru.

14.12 Výsledky ke kapitole 12.2 – Funkce exponenciální a logaritmické

Ad cvičení 12.1.

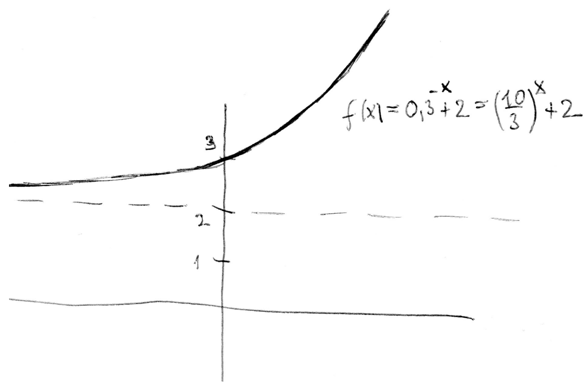
a) $Df = R$, $Hf = R+$, graf viz obrázek:



b) Nejprve zaměníme x a y, dostaneme $x = 0{,}5^y$. Nyní z tohoto vztahu vyjádříme y, přitom máme na paměti, že inverzní funkce k mocninné funkce je funkce logaritmická, jejíž základem je číslo, které bylo v exponenciální funkci umocněno na mocninu x, dostaneme tedy: $y = \log_{0,5} x$.

Ad cvičení 12.2.

a) Nehezkou zápornou mocninu upravíme: $f(x) = 0{,}3^{-x} + 2 = \left(\frac{3}{10}\right)^{-x} + 2 = \left(\frac{10}{3}\right)^{x} + 2$. Vidíme, že $Df = R$ a $Hf = (2; \infty)$ a funkce je rostoucí, protože základ exponentu je $\frac{10}{3}$, což je číslo větší než 1:

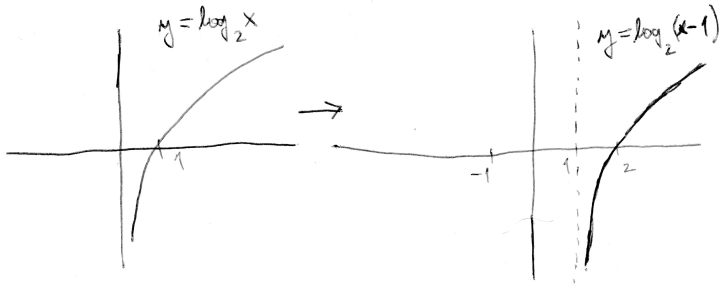


b) Nejprve zaměníme y a x, dostaneme $x = (\frac{10}{3})^y + 2$. Odtud vyjádříme y:

$$f^{-1}(x) = y = \log_{\frac{10}{3}}(x - 2).$$

Ad cvičení 12.3.

a) $Df = (1; \infty)$ ... kdo si není jistý, řeší nerovnici $x - 1 > 0$, tj. argument funkce logaritmické musí být kladný. Dále $Hf = R$. Graf funkce je posunutý o hodnotu 1 doprava vzhledem k základnímu grafu $y = log_2 x$:



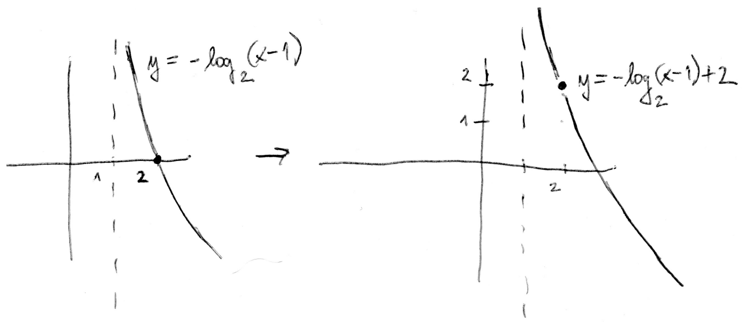
b) Rovnici $\ln y = x^2 + 2$ lze převést na ekvivalentní rovnici

$$e^{\ln y} = e^{x^2+2}.$$

Na levé straně této rovnice jsou funkce navzájem inverzní, tj. obě se vyruší a dostaneme $y = e^{x^2+2}$.

Ad cvičení 12.4.

a) Vyjdeme z grafu funkce af funkce $y = \log_2(x - 1)$, který je výsledkem cvičení 12.3.(a). Nejprve k funkci ze cvičení 12.3.(a) přidáme znaménko MINUS – tím dojde k překlopení celého grafu vzhledem k vodorovné souřadné ose x. A nakonec k výsledku přičteme hodnotu 2, což odpovídá posunu celého grafu v kladném směru osy y:



Posun grafu o hodnotu 2 nezměnil ani Dy, ani Hy funkce z předchozího kroku, pouze se bod $[2; 0]$ (průsečík grafu s osou x) posunul do bodu $[2; 2]$. Celkem vidíme u výsledné funkce, že $Df = (1; \infty)$, $Hf = R$.

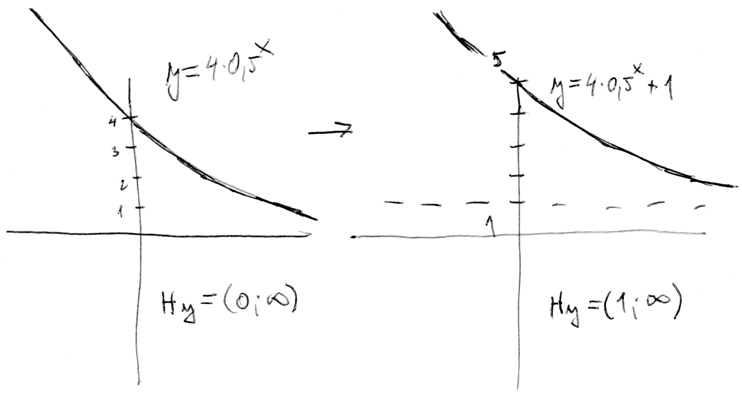
b) Nejprve zaměníme x, y a dostaneme $x = -\log_2(y-1)+2$. Odtud vyjádříme proměnnou y: před umístěním obou stran rovnice do mocniny čísla 2, které je základem logaritmu v našem příkladu, rovnici upravíme do takového tvaru, že logaritmus je na jedné straně s koeficientem 1, vše ostatní je na druhé straně rovnice:

$$\log_2(y - 1) = 2 - x.$$

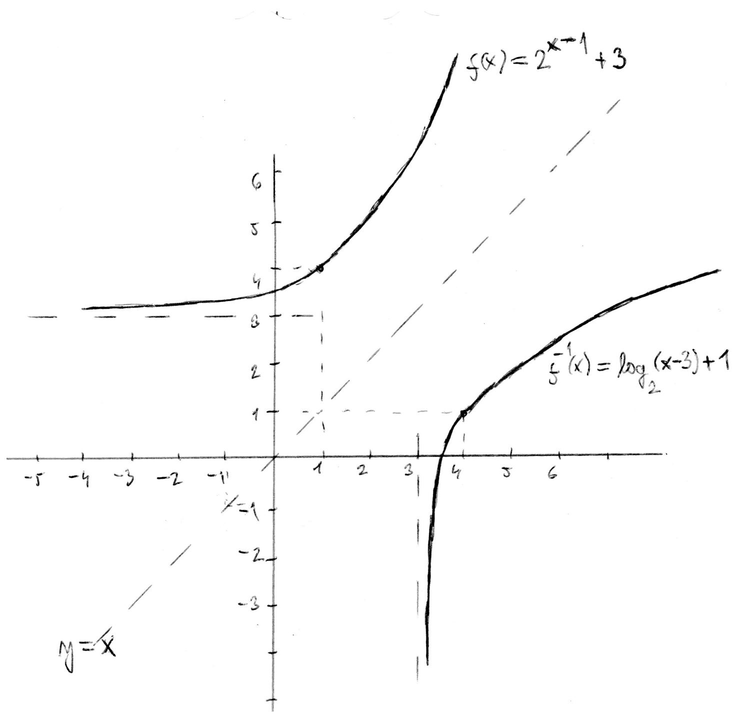
Nyní obě strany rovnice napíšeme do exponentu základu 2 – díky „zametení smetí“ před logaritmem na levé straně se exponenciální funkce a logaritmus o stejném základu vyruší, tj. dostaneme

$$2^{\log_2(y-1)} = 2^{2-x} \;\Rightarrow\; y-1 = 2^{2-x} = 2^2 \cdot 2^{-x} = 4 \cdot 0{,}5^x \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y = 4 \cdot 0{,}5^x + 1}}.$$

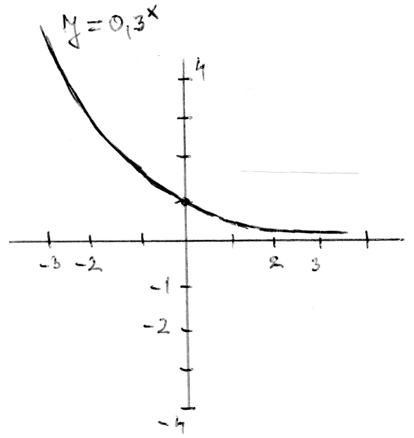
Můžeme vesele kreslit graf exponenciální funkce:

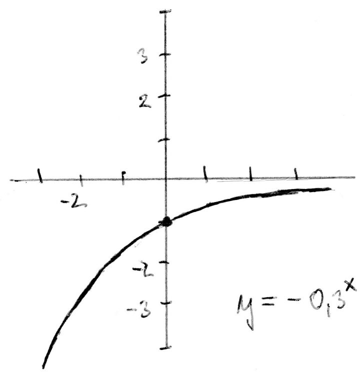


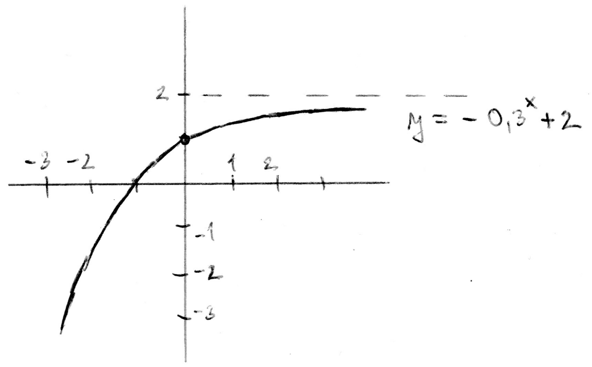
Ad cvičení 12.5. K funkci $f(x) = 2^{x-1} + 3$ existuje funkce inverzní, jejíž předpis má tvar $f^{-1}(x) = \log_2(x-3) + 1$. $D(f) = R$, $H(f) = (3;\infty)$, $D(f^{-1}) = (3;\infty)$, $H(f^{-1}) = R$. Oba grafy vidíte na obrázku osově souměrné vzhldem k přímce $y = x$, která představuje záměnu proměnných při vyjádření závislosti v inverzním směru:



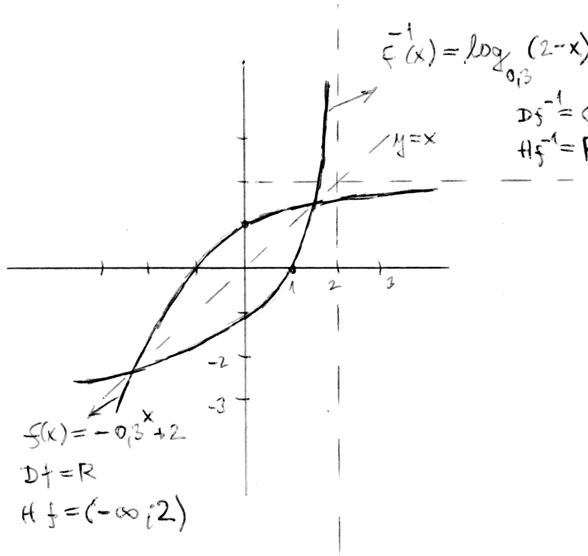
Ad cvičení 12.6. Grafy funkcí a) $y = 0{,}3^x$; b) $y = -0{,}3^x$; c) $y = 2 - 0{,}3^x$ vidíte na obrázku:







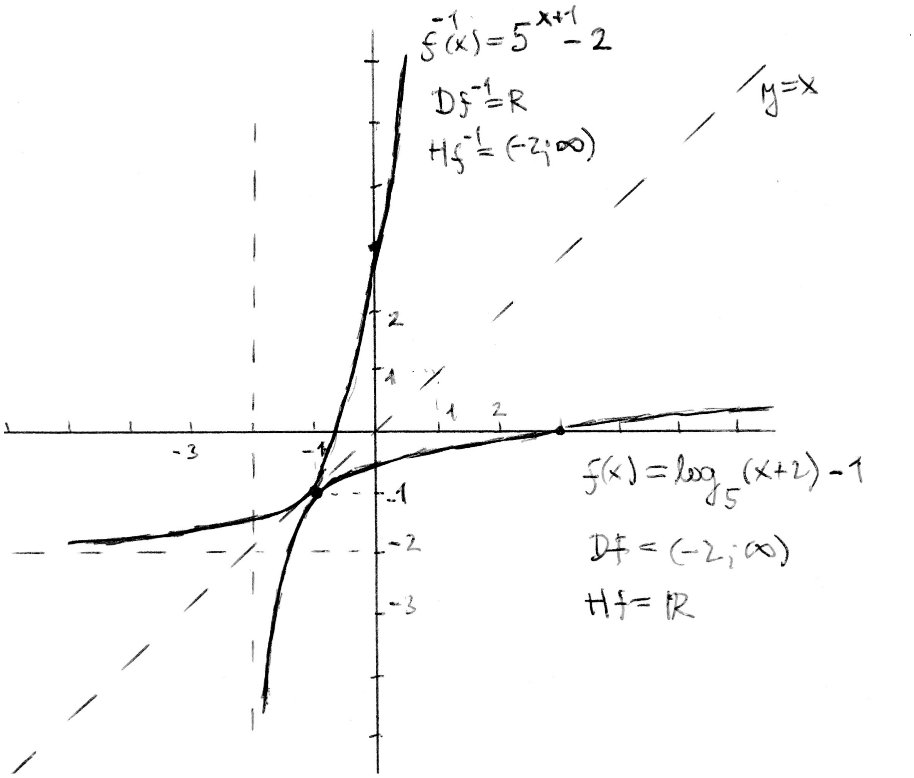
k poslední uvedené funkci je na následujícím obrázku nakreslena i funkce inverzní:



Ad cvičení 12.7. K funkci $f(x) = 2 \cdot \log_4 x - 1$ má inverzní funkce předpis $f^{-1}(x) = 4^{\frac{x+1}{2}}$. Pokud si ještě vyjádříme 4 jako 2^2, lze vzorec upravit na tvar

$$f^{-1}(x) = 2^{2\cdot(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})} = 2^{x+1}.$$

Ad cvičení 12.8. K funkci $f(x) = \log_5(x + 2) - 1$ existuje funkce inverzní zadaná předpisem $f^{-1}(x) = 5^{x+1} - 2$. Oba grafy vidíte na obrázku:



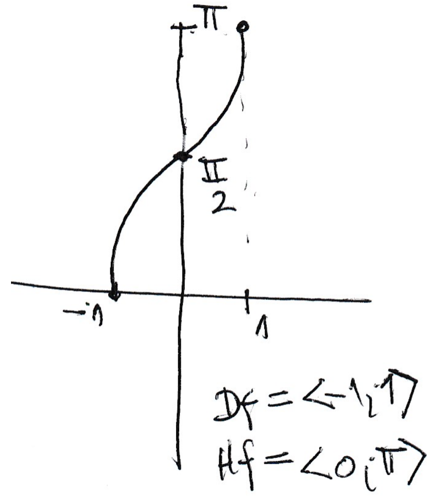
Je patrné, že $D(f) = (-2; \infty)$, $H(f) = R$, $D(f^{-1}) = R$, $H(f^{-1}) = (-2; \infty)$.

14.13 Výsledky ke kapitole 13.2 – Funkce goniometrické a cyklometrické

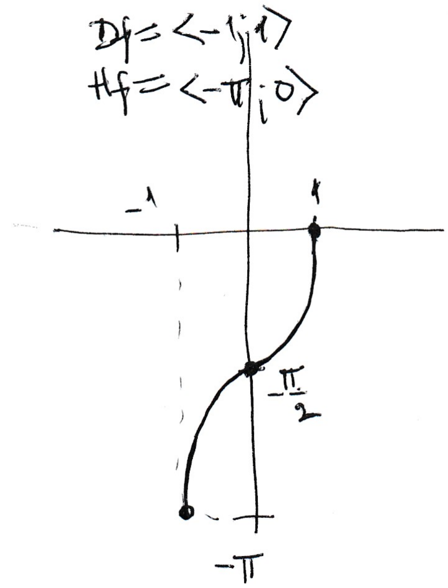
Ad cvičení 13.1. až 13.6. Výsledky příkladů najdete v učebnici [10].

Cvičení 13.7. Grafy a vlastnosti cyklometrických funkcí:

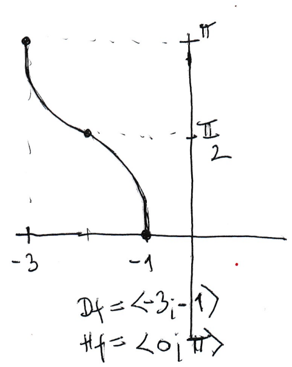
1. Viz přednáška.
2. Z grafu lze všechny vlastnosti funkce $f(x) = \arccos(-x)$ vyčíst:



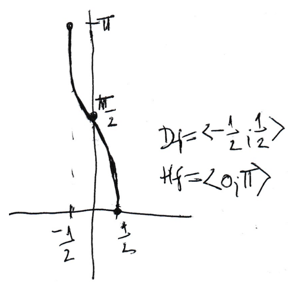
3. Z grafu lze všechny vlastnosti funkce $f(x) = -\arccos x$ vyčíst:



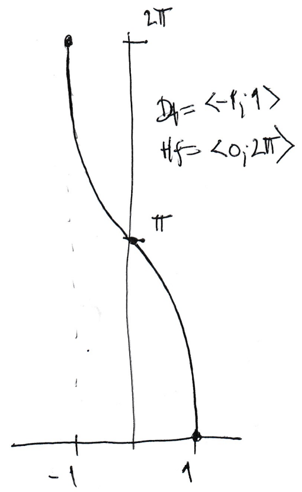
4. Z grafu lze všechny vlastnosti $f(x) = \operatorname{arccos}(x+2)$ vyčíst:



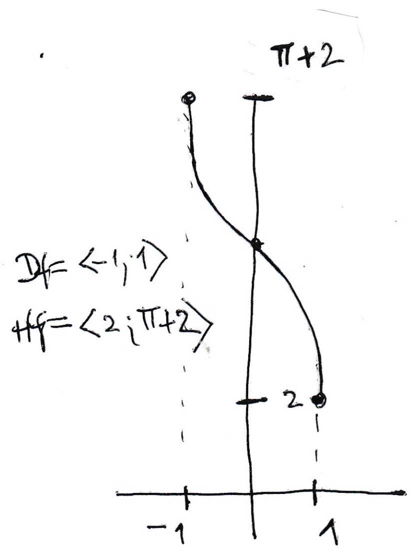
5. Z grafu lze všechny vlastnosti funkce $f(x) = \operatorname{arccos}(2x)$ vyčíst:



6. Z grafu lze všechny vlastnosti funkce $f(x) = 2 \cdot \operatorname{arccos} x$ vyčíst:



7. Z grafu lze všechny vlastnosti funkce $f(x) = 2 + \arccos x$ vyčíst:

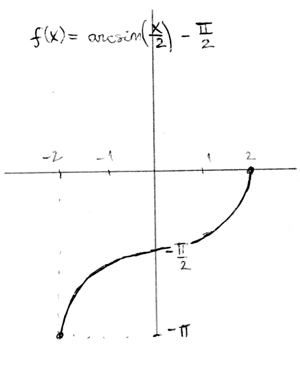


8. Graf funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$:

- Vyjdeme z $D(\arcsin x) = \langle -1; 1\rangle$, $H(\arcsin x) = \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$: Argument funkce arcsin musí ležet v tomtéž intervalu $\langle -1; 1\rangle$:

$$-1 \le \frac{x}{2} \le 1 \;\Rightarrow\; -2 \le x \le 2 \;\Rightarrow\; D(f) = \langle -2; 2\rangle.$$

- $H(f)$ dostaneme tak, že $H(\arcsin x) = \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ posuneme o hodnotu $\frac{\pi}{2}$ do „záporného směru“: $H(f) = \langle -\pi; 0\rangle$.
- Ještě si můžeme uvědomit, že funkce arcus sinus je rostoucí (pokud v argumentu není minus před x, protože to by způsobilo zase nějaké změny);
- Vyznačíme do grafu funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru: $f(-2) = -\pi$, $f(2) = 0$ a můžeme kreslit graf:



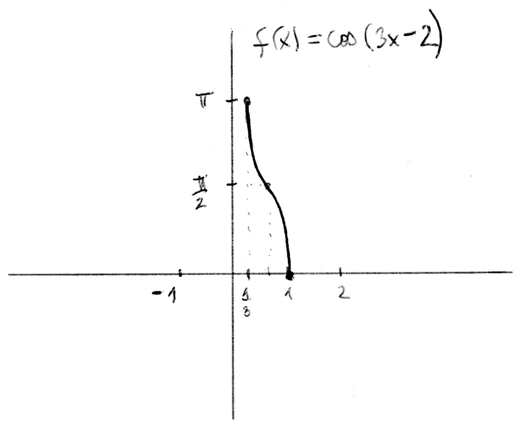
Vlastnosti funkce $f(x)$: Funkce je rostoucí na celém $D(f)$, lokální i globální minumum nastává v bodě $x = -2$, lokální a globální maximum nastává v bodě $x = 2$.

9. Graf funkce $f(x) = \arccos(3x - 2)$:

   - Vyjdeme z $D(\arccos\ x) = \langle -1; 1\rangle$, $H(\arccos\ x) = \langle 0; \pi\rangle$: Argument funkce arccos musí ležet v tomtéž intervalu $\langle -1; 1\rangle$:

   $$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 3x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow D(f) = \langle \frac{1}{3}; 1\rangle.$$

   - $H(f)$ se nemění, protože po vypočtení arkus kosinu argumentu už dále k této hodotě nic nepřičítáme, ani ji ničím nenásobíme, tj. $H(f) = \langle 0; \pi\rangle$.
   - Ještě si můžeme uvědomit, že funkce arcus cosinus je klesající (pokud v argumentu není minus před x, protože to by způsobilo zase nějaké změny);
   - Vyznačíme do grafu funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru: $f(\frac{1}{3}) = \pi$, $f(1) = 0$ a můžeme kreslit graf:



   Vlastnosti funkce $f(x)$: Funkce je klesající na celém $D(f)$, lokální i globální minimum nastává v bodě $x = 1$, lokální a globální maximum nastává v bodě $x = \frac{1}{3}$.

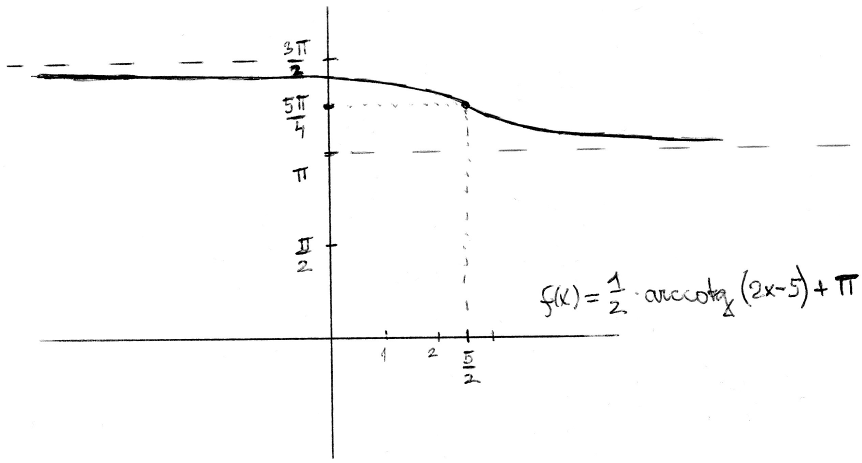
10. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arccotg}(2x - 5) + \pi$:

   - Vyjdeme z $D(\operatorname{arccotg}\ x) = R$, $H(\arccos\ x) = (0; \pi)$: Argument funkce arccotg může být libovolný, tj. $D(f) = R$. Maximálně bychom si mohli říci, kam se posune základní bod $[0; \frac{\pi}{2}]$ průsečíku grafu funkce arccotg x se svislou osou: tento jakýsi střed souměrnosti grafu se posune do takového bodu, ve kterém platí $2x - 5 = 0$, tj. $x = \frac{5}{2}$.
   - $H(f)$ se změní dvěma zásahy: nejprve se násobením jednou polovinou interval $H(\operatorname{arccotg}\ x) = \langle 0; \pi\rangle$ zmenší na $(0; \frac{\pi}{2})$, a pak se po přičtení čísla π posune na $H(f) = (\pi; \frac{3\pi}{2})$. Odtud lze určit, že střed souuměrnosti grafu bude mít y-ovou souřadnici ve středu intervalu $H(f)$, tj. pro

   $$y = \frac{1}{2}(\pi + \frac{3\pi}{2}) = \frac{5\pi}{4}$$

   - Ještě si můžeme uvědomit, že funkce arcus cotangens je klesající (pokud v argumentu není minus před x, protože to by způsobilo zase nějaké změny);

- Vyznačíme do grafu střed souměrnosti grafu $[\frac{5}{2}; \frac{5\pi}{4}]$, a také asymptoty v krajních bodech intervalu $H(f)$ – jedná se o konstantní funkce $y = \pi$ a $y = \frac{3\pi}{2}$ – a můžeme kreslit graf:



Vlastnosti funkce $f(x)$: Funkce je klesající v R a nemá lokální ani globální extrémy – můžeme maximálně říci, že je ohraničená shora i zdola.

Ad cvičení 13.8. Výsledky příkladů najdete v učebnici [10].

Seznam literatury:

1 P. Horák: M 1125 Základy matematiky. Elektronický text do analogického předmětu na Přírodovědecké fakultě MU Brno. Počet stran 100 v roce 2013. Tento text pokrývá předmět M0001 Základy matematiky na Pedagogické fakultě asi z poloviny, ale i daná polovina se věnuje záležitostem odlišným od těch, na které je kladen důraz na Pedagogické fakultě.

2 Rediger Thiele: Matematické důkazy. SNTL Praha 1985. Počet stran 160. Představení zákonitostí logického usuzování a dokazování v matematice. Poněkud širší pokrytí tématu logika, kterému jsou v předmětu Základy matematiky věnovány první tři přednášky.

3 Raymond Smullyan: Jak se jmenuje tahle knížka? Zajímavé logické problémy od jednoduchých hádanek pro ZŠ až po složitější logické úlohy, které vyžadují důkladný vysokoškolský rozbor.

4 D.Jordan, P.Smith: Mathematical techniques. Oxford 2008, 4th Edition. V kontextu předmětu Základy matematiky nás z knihy zajímá zatím jen kapitolka 35 – sets (= množiny) na str. 791-800.

5 Eva Nováková: Analýza výsledků soutěže Matematický klokan, Brno 2016. Zajímavá kniha seznamující s mezinárodní soutěží Matematický klokan a rozborem výsledků této soutěže v ČR v kategorii pro 4.-5. třídy ZŠ. Tato kniha dobře uvádí do problematiky didaktiky matematiky na ZŠ: úlohy různého typu, dělení matematiky na různá odvětví, apod.

6 Hrůša,K., Dlouhý,Z., Rohlíček, J.: Úvod do studia matematiky. SPN 1963. Zdroj několika příkladů v kapitole 4.

7 Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša: Matematika pro primy, sekundy, tercie, kvarty – série 17 učebnic pro nižší třídy gymnázií a 2.stupeň ZŠ.

8 Charles Pinter: A book of Abstract Algebra, 2010. Jedná se o reprint druhého vydání z roku 1990. Tento text je vhodný pro partie navazujícího předmětu Algebra 1 na PdF MUNI, nicméně autora přednášky Základy matematiky už částečně inspiroval. Je neobyčejně čtivě napsán. Pinter říká, že napsal svou knihu z té pozice, že algebra (a tím i diskrétní matematika) je důležitá a má důležitá uplatnění.

9 O.Odvárko: Funkce, Prometheus 1993. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 3, počet stran 160. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

10 O.Odvárko: Goniometrie, Prometheus 1994. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 7, počet stran 127. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

11 S.Kowal: Matematika pro volné chvíle. Praha 1985, druhé vydání. Kniha, která na velkém množství úloh prochází celou historii matematiky v rámci zajímavých úloh, jejichž řešení uvádí buď v textu, nebo na konci každé kapitoly. Název láká širokou veřejnost, ale řada úloh je vysokoškolské obtížnosti, i když jejich řešení je často proveditelné i na SŠ.

12 Jedličková, Krupka, Nechvátalová: Matematika – nová škola. Série 16 učebnic a 16 pracovních sešitů nově vznikající v Brně v letech 2012 až 2024.

13 Odvárko, O.: Finanční matematika. Poslední, dvanáctá učebnice ze séria učebnic a pracovních sešitů k výuce na 2. stupni ZŠ.

14 Jan Kopka: Svazy a Booleovy algebry (Ústí nad Labem 1991, zejména str. 19-82). Kolega Kopka napsal svůj text z té pozice, že by rád přehledně a srozumitelně podal přehled pojmů algebry a diskrétní matematiky, aby byla vidět její krása. Kniha je hlubším rozvedením pojmu uspořádaná množina uvedeným v předmětu Základy matematiky.

15 Rosický, J.: Grupy a okruhy. Skriptum přírodovědecké fakulty MUNI, Brno 2000. Pokročilý text jako doplněk předmětu Algebra 1, zde byl využit pouze pro důkaz vět o dělitelnosti celých čísel v kapitole 5.

16 Robová, Hála, Calda: Matematika pro SŠ – komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus 2013. Tato kniha je dobrým úvodem do komplexních čísel na 56 stranách, do kombinatoriky na 38 stranách (kromě kombinací s opakováním, které jsou vysvětlovány krkolomně), do pravděpodobnosti na 46 stranách (věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec zde nejsou už dost procvičeny) a do popisné statistiky na 57 stranách. Stručně a výstižně, pro kteroukoli z těchto čtyř částí matematiky je to kniha k nezaplacení (a priceless book[49]).

17 P. Horák: Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I, Brno 2002. Sbírka příkladů ke staršímu vydání textu [1] na Přírodovědecké fakultě MU.

18 M.Krynický: Matematika realisticky. Online pdf materiály (cca 500 hodin pro 6. až 9. ročník ZŠ, cca 500 hodin pro čtyřleté gymnázium) na stránce realisticky.cz. Dobrý výchozí bod ohledně obsahu i didaktiky matematiky na ZŠ a SŠ. Vzhledem k tomu, že se jedná o dobrý, spíše výjimečný materiál online, je v České Republice využíván minimálně jako doplňkový materiál na řadě základních a středních škol.

[49]Studenti angličtiny pozor: „priceless“ kupodivu neznamená něco bezcenného, ale je to označením věcí ceny nevyčíslitelné = nezměrné.