

MA0005 Algebra 2, 10. seminář

27. 11. 2024

1 Vlastní čísla a vlastní vektory

Literatura a zdroje

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: <https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra>.
- Fiala, J. a kol. *Sbírka úloh z matematiky*. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2008. Dostupné z: <https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka>.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ s maticí A rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo λ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru \vec{u} .

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ s maticí A rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo λ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru \vec{u} .

Poznámka:

- Vlastním vektorům se také říká “invariantní směry” či “invariantní vektory”.
- Je-li \vec{u} vlastní vektor, pak i vektor $\alpha \cdot \vec{u}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) je vlastní.
- Vlastní vektory odpovídající jedné vlastní hodnotě λ tvoří vektorový podprostor.

Vlastní čísla a vlastní vektory – postup nalezení

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$$

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad (E: \text{jednotková matice})$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$$

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad (E: \text{jednotková matice})$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Postup nalezení vlastních čísel a vektorů

- 1 Najdeme determinant matice $A - \lambda \cdot E$, z něhož nám vyjde rovnice s neznámou λ , kterou vyřešíme.
- 2 Do systému $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{0}$ dosadíme vypočítané hodnoty λ a nalezneme vlastní vektory jako množinu řešení systému.

Příklad 1

Lineární transformace φ vektorového prostoru \mathbb{R}^2 je dána maticí A ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace φ .

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Výsledky příkladu 1

- a) Pro $\lambda_1 = 6$: $\vec{n}_1 = (3, 2)$, pro $\lambda_2 = -7$: $\vec{n}_2 = (-2, 3)$;
- b) pro $\lambda_1 = 6$: $\vec{n}_1 = (1, 1)$, pro $\lambda_2 = -1$: $\vec{n}_2 = (-5, 2)$;
- c) pro $\lambda_1 = 9$: $\vec{n}_1 = (5, 2)$, pro $\lambda_2 = -5$: $\vec{n}_2 = (-1, 1)$;
- d) pro $\lambda = 2$: $\vec{n} = (1, 0)$;
- e) pro $\lambda_1 = 1$: $\vec{n}_1 = (-1, 1)$, pro $\lambda_2 = -1$: $\vec{n}_2 = (1, 1)$.

Příklad 2

Lineární transformace φ vektorového prostoru \mathbb{R}^3 je dána maticí A ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace φ .

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

- a) Pro $\lambda_1 = 1$: $\vec{n}_1 = (-1, 0, 1)$, pro $\lambda_2 = 2$: $\vec{n}_2 = (-1, -1, 1)$,
pro $\lambda_3 = 3$: $\vec{n}_3 = (0, -1, 1)$;
- b) pro $\lambda = -1$: $\vec{n} = (2, -1, 1)$;
- c) pro $\lambda = -1$: $\vec{n} = (-1, -1, 1)$;
- d) pro $\lambda_1 = 2$: $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$, pro $\lambda_2 = -1$: $\vec{n}_2 = (0, -1, 1)$,
pro $\lambda_3 = 1$: $\vec{n}_3 = (1, 0, 1)$;
- e) pro $\lambda_1 = 0$: $\vec{n}_1 = (4, 4, 1)$, pro $\lambda_2 = 3$: $\vec{n}_2 = (1, -2, 1)$.

Příklad 3

Viz video “Matice přechodu a zobrazení motivačně” na webové stránce www.isibalo.com/matematika/linearni-algebra/matice-prechodu-a-zobrazeni-motivacne.

Zadání:

Určete matici A_S zobrazení φ (ve standardní bázi), které překlopí vektory prostoru \mathbb{R}^2 podle přímky $p : x - 2y = 0$.

Nápověda: Zkuste najít jinou bázi α , vhodnější než standardní, pro níž bude snadné určit matici zobrazení A_α , které překlápí vektory podle zadané přímky. Pomocí matic přechodu a jejich kombinací s A_α potom snadno dostaneme matici A_S .

Příklad 3

Viz video “Matice přechodu a zobrazení motivačně” na webové stránce www.isibalo.com/matematika/linearni-algebra/matice-prechodu-a-zobrazeni-motivacne.

Zadání:

Určete matici A_S zobrazení φ (ve standardní bázi), které překlopí vektory prostoru \mathbb{R}^2 podle přímky $p : x - 2y = 0$.

Nápověda: Zkuste najít jinou bázi α , vhodnější než standardní, pro níž bude snadné určit matici zobrazení A_α , které překlápí vektory podle zadané přímky. Pomocí matic přechodu a jejich kombinací s A_α potom snadno dostaneme matici A_S .

Řešení: při zvolené bázi $\alpha = ((2; 1), (-1; 2))$ je matice

$$A_S = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 4

Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace φ prostoru \mathbb{R}^2 zadané maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi. Následně ověřte, že body $[x, y]$ jednotkové kružnice (tj. vektory (x, y)) se pomocí zobrazení φ zobrazí na body elipsy, jejíž délky poloos budou rovny vlastním číslům.

Viz animace `cv10_pr4.ggb` ve studijních materiálech a složce Semináře.