MA0005 Algebra 2, 2. seminář

9. 10. 2024

Náplň cvičení

1. Determinant matice
   - Důležitá pravidla pro výpočet determinantu
   - Laplaceův rozvoj determinantu
   - Příklady na výpočet determinantu
   - Výpočet determinantu převodem na schodový tvar
   - Linearita při výpočtu determinantu

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

D1 $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.

D2 Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.

D3 Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.[a]

D4 Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

D6 Je-li některý řádek matice M lineární kombinací ostatních, pak $|M| = 0$.

[a] Jedná se o důsledek vlastnosti D3.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

- D1 $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.
- D2 Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.
- D3 Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.[a]
- D4 Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).
- D6 Je-li některý řádek matice M lineární kombinací ostatních, pak $|M| = 0$.

[a] Jedná se o důsledek vlastnosti D3.

Důležitý důsledek: Determinant matice M obsahující nulový řádek je roven 0.

D5 Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

D5 Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

D5 Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Rozvoj podle l-tého sloupce:

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |M_{il}|,$$

kde M_{il} jsou matice vzniklé z M vypuštěním i-tého řádku a l-tého sloupce.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant (Laplaceovým rozvojem dle vybraného řádku či sloupce)

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant (Laplaceovým rozvojem dle vybraného řádku či sloupce)

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant (Laplaceovým rozvojem dle vybraného řádku či sloupce)

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195, (b) 18.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant (s využitím pravidel D2, D3, D4)

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant (s využitím pravidel D2, D3, D4)

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (c) -28,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant (s využitím pravidel D2, D3, D4)

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (c) -28, (d) 30.

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105,

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105, (b) -18.

Hodnost matice a elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Otázka: Kdy jsou dva řádky matice lineárně závislé?

Hodnost matice a elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Otázka: Kdy jsou dva řádky matice lineárně závislé?

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Hodnost matice a elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Otázka: Kdy jsou dva řádky matice lineárně závislé?

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Důležitá poznámka: Elementární řádkové úpravy nezmění hodnost matice, resp. nezpůsobí změnu řešení SLR.

Schodový tvar matice

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Příklad 1: rozhodněte, zda jsou následující matice ve schodovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad

Vypočítejte determinanty matic A, B úpravou na schodový tvar, je-li

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Příklad

Vypočítejte determinanty matic A, B úpravou na schodový tvar, je-li

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: $|A| = 2$,

Příklad

Vypočítejte determinanty matic A, B úpravou na schodový tvar, je-li

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: $|A| = 2, \quad |B| = -4.$

Determinant jako zobrazení lineární v každé složce

Vlastnost D3 (linearita při výpočtu determinantu)

Determinant $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n})$ je zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\vec{a_i}$ jsou řádky matice), které je lineární v každé své složce, tj. pokud pokud se na k-tém řádku vyskytuje lineární kombinace dvou vektorů $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$, tak determinant lze upravit na lineární kombinaci dvou determinantů:

$$\begin{aligned} det(\vec{a_1}, \dots, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \dots, \vec{a_n}) &= \alpha \cdot det(\vec{a_1}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{a_n}) + \\ &+ \beta \cdot det(\vec{a_1}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{a_n}). \end{aligned}$$

Příklad: Proveďte Laplaceův rozvoj matice M podle 5. sloupce a využijte linearity determinantu, abyste redukovali počet determinantů 4. řádu.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$