# MA0005 Algebra 2, 3. seminář

16. 10. 2024

# Náplň cvičení

1. Vektorové prostory
   - Lineární (ne)závislost vektorů
   - Dimenze a báze vektorového prostoru
   - Podprostor vektorového prostoru
2. Systémy lineárních rovnic (SLR)
   - Maticový zápis SLR
   - Vzájemná poloha tří rovin
   - Gaussova eliminační metoda
3. Vyjádření vektoru v jiné bázi

**Literatura**


- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

# Vektorový prostor

## Axiomy pro vektorový prostor

$V$ nazveme vektorovým (lineárním) prostorem nad tělesem $T$ s operacemi $+, \cdot$, jestliže

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} \in V$ (uzavřenost na operaci $+$)
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativita operace $+$)
3. $\exists \vec{o}.\ \forall \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{o} = \vec{u} = \vec{o} + \vec{u}$ (neutrální prvek pro operaci $+$)
4. $\forall \vec{u} \in V.\ \exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (inverze vzhledem k operaci $+$)
5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativita operace $+$)

"1" $\forall \vec{u} \in V, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in V$ (uzavřenost na součin skaláru a vektoru)

"2" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : s \cdot (t \cdot \vec{u}) = (s \cdot t) \cdot \vec{u}$ (asociativita operace $\cdot$)

"3" $\exists 1 \in T.\ \forall \vec{u} \in V : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} = \vec{u} \cdot 1$ (neutrální prvek pro operaci $\cdot$)

"6a" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : (s + t) \cdot \vec{u} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{u}$ (distributivita operací)

"6b" $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall s \in T : s \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ (distributivita operací)

## Lineární kombinace vektorů

Pokud $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}$ jsou vektory ($k \in \mathbb{N}$), tak vektor

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{u_k}$$

je **lineární kombinací vektorů** $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}$
(přičemž $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ jsou skaláry).

(Viz skripta, Definice 7 na str. 13.)

# Lineární (ne)závislost vektorů

## Lineární kombinace vektorů

Pokud $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ jsou vektory ($k \in \mathbb{N}$), tak vektor

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{u_k}$$

je **lineární kombinací vektorů** $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$
(přičemž $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T$ jsou skaláry).

(Viz skripta, Definice 7 na str. 13.)

## Lineární (ne)závislost vektorů

Posloupnost vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ je **lineárně závislá**, když některý z vektorů je lineární kombinací těch ostatních vektorů (ne nutně všech). V opačném případě je posloupnost vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ **lineárně nezávislá**.

(Viz skripta, Definice 10 na str. 25.)

# Lineární (ne)závislost vektorů

Zjistěte, zda je množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ lineárně závislá, je-li

a) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 40 \\ 17 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}.$

# Lineární (ne)závislost vektorů

Zjistěte, zda je množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ lineárně závislá, je-li

a) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 40 \\ 17 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}.$

**Výsledky:**
a) ano,

# Lineární (ne)závislost vektorů

Zjistěte, zda je množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ lineárně závislá, je-li

a) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 40 \\ 17 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}.$

**Výsledky:**
a) ano, b) ano.

# Báze a dimenze vektorového prostoru

## Báze a dimenze vektorového prostoru

Posloupnost vektorů $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k})$ nazveme **bází** (množinou generátorů) vektorového prostoru $V$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$, jestliže

1. je lineárně nezávislá,
2. každý vektor $\vec{u} \in V$ lze vyjádřit lineární kombinací $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \dots + \alpha_k \cdot \vec{v_k}$ pro nějaké $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ (tj. vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ generují celý prostor $V$).

**Dimenzí** vektorového prostoru $V$ rozumíme počet vektorů nějaké jeho báze. Značíme $\dim V$.

Čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ z vyjádření vektoru $\vec{u}$ nazýváme **souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ v bázi** $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k})$.

# Vektory generující vektorový prostor

**Příklad 16:** Generují vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_4}$ vektorový prostor $\mathbb{R}^3$?

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 3.3.B2:** Generují vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_5}$ vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$?

a) $$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u_5} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Příklad 3.3.B2:** Generují vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$?

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$,

$\vec{u_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

**Výsledky:** 16. ne,

**Příklad 3.3.B2:** Generují vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_5}$ vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$?

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$

$\vec{u_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

**Výsledky:** 16. ne,
3.3.B2.(a) ne,

**Příklad 3.3.B2:** Generují vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$?

b) $$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

**Výsledky:** 16. ne,
3.3.B2.(a) ne, (b) ano.

# Vektorový prostor

## Definice vektorového podprostoru

Vektorový podprostor prostoru $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je taková podmnožina $W$ prostoru $V$, která je uzavřená vzhledem k operaci $+$ (sčítání vektorů) a $\cdot$ (násobení vektoru skalárem):

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$

"1" $\forall \vec{u} \in W, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in W$

Poznámka: Vektorový podprostor je tedy uzavřený na lineární kombinaci svých vektorů.

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor $W$ zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi $\alpha_W$ podprostoru $W$.

a) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix},$

$\vec{u_5} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor $W$ zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi $\alpha_W$ podprostoru $W$.

c) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$

$\vec{u_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Výsledky:**
a) $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$;
b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$;

# Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor $W$ zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi $\alpha_W$ podprostoru $W$.

c) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$

$\vec{u_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Výsledky:**

a) $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$;
b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$;
c) $\dim W = 4$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_5})$.

# Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

# Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

## Maticový zápis soustavy

Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí systému SLR.

# Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

## Rozšířená matice SLR

Matici

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme rozšířenou maticí systému SLR.

# Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

# Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

## Počet řešení soustavy

Soustava lineárních rovnic (SLR) o 3 neznámých

(a) má právě jedno řešení, je-li $h(A) = h(A|b) = 3$ (roviny se protínají v jednom bodu);

(b) má nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) = h(A|b) < 3$ (roviny se protínají buď v jedné přímce, když $h(A) = h(A|b) = 2$, nebo splývají v jednu rovinu, je-li $h(A) = h(A|b) = 1$);

(c) nemá řešení, je-li $h(A) \neq h(A|b)$ (geometricky to může vyjít různě).

# Vzájemná poloha tří rovin

## Vzájemná poloha tří rovin

1. všechny tři roviny jsou rovnoběžné a nemají průsečík, ani průsečnici
2. dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích
3. všechny jsou různoběžné a protínají se v jedné průsečnici (svazek rovin)
4. všechny jsou různoběžné a po dvou se protínají v průsečnici (tyto tři průsečnice jsou rovnoběžné)
5. všechny jsou různoběžné a protínají se v jednom bodě (trs rovin)
6. všechny tři roviny splývají v jednu

Ilustrace prvních pěti případů jsou dostupné na [této stránce].

# Vzájemná poloha tří rovin

**Příklad 15.6.40:** Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

# Vzájemná poloha tří rovin

**Příklad 15.6.40:** Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

**Výsledky:**

a) tři různoběžné roviny, společný bod $P[1; -1; 2]$,
b) tři různoběžné roviny, žádný společný bod,
c) tři různoběžné roviny, společná přímka $p = \{[t; -1 - t; -t],\ t \in \mathbb{R}\}$,
d) dvě rovnoběžné roviny, třetí je s nimi různoběžná.

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ neznámých postupujeme takto:

# Gaussova eliminační metoda

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.

# Gaussova eliminační metoda

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.

# Gaussova eliminační metoda

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.

# Gaussova eliminační metoda

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.

# Gaussova eliminační metoda

**Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli):** SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

## Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o $m$ řádcích a $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.
   - V obou případech postupujeme tzv. zpětným chodem, tj. bereme rovnice zdola a volíme za parametry počet neznámých v dané rovnici MINUS jedna, abychom poslední neznámou v každé rovnici mohli dopočítat pomocí ostatních neznámých – parametrů.

# Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

# Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

**Výsledky:** (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$,

# Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

**Výsledky:** (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, (c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

# Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

# Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

**Výsledky:** (a) SLR nemá řešení,

# Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\
x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\
2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20
\end{array}$$

**Výsledky:** (a) SLR nemá řešení, (c) SLR nemá řešení.

# Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

# Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

**Výsledky:** a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$,

# Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

**Výsledky:** a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$, c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ \frac{3}{2} \\ t \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$.

# Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}
$$

# Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}$$

**Výsledek:**

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

# Standardní báze vektorových prostorů

Nejběžnějším způsobem, jak zadat vektor, je zápis jeho souřadnic ve standardní bázi. Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ jde o bázi

$$S_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se jedná o bázi

$$S_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Někdy však bude účelné zvolit jinou bázi, v níž budeme vektory vyjadřovat.

# Vyjádření vektoru v jiné bázi

**Příklad 3.3.B5:** Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi $\alpha$ vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0; 1; 2)_S$ v bázi $\alpha$.

a) $\alpha = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

b) $\alpha = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

c) $\alpha = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

# Vyjádření vektoru v jiné bázi

**Příklad 3.3.B5:** Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi $\alpha$ vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0;1;2)_S$ v bázi $\alpha$.

a) $\alpha = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

b) $\alpha = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

c) $\alpha = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

**Výsledky:** a) vektory netvoří bázi, b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} \\ \frac{13}{14} \end{pmatrix}_\alpha$, c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}_\alpha$.

# Vyjádření vektoru v jiné bázi

**Příklad 3.4.B23:** Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) v bázi $\alpha = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$;

b) v bází $\beta = (\vec{u_3}, \vec{u_2}, \vec{u_4}, \vec{u_1})$.

# Vyjádření vektoru v jiné bázi

**Příklad 3.4.B23:** Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) v bázi $\alpha = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$;

b) v bází $\beta = (\vec{u_3}, \vec{u_2}, \vec{u_4}, \vec{u_1})$.

**Výsledky:** 3.4.B23.a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_\alpha$, b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_\beta$.

# Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru $W$ generovaném následující skupinou vektorů.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$

# Výsledky předchozího příkladu

(a) $\vec{u} \in W, \;\; \vec{v} \notin W;$
(b) $\vec{u} \in W, \;\; \vec{v} \in W;$
(c) $\vec{u} \notin W, \;\; \vec{v} \in W.$