MA0005 Algebra 2, 4. seminář

23. 10. 2024

Náplň cvičení

1. Podprostor vektorového prostoru
   - Ověření podmínek vektorového podprostoru
   - Součet a průnik vektorových podprostorů

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Definice vektorového podprostoru

Vektorový podprostor prostoru $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je taková podmnožina W prostoru V, která je uzavřená vzhledem k operaci $+$ (sčítání vektorů) a $\cdot$ (násobení vektoru skalárem):

1 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$

"1" $\forall \vec{u} \in W, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in W$

Poznámka: Vektorový podprostor je tedy uzavřený na lineární kombinaci svých vektorů, platí však pro něj všechny podmínky jako pro vektorový prostor!

Ověření podmínek vektorového podprostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0 \right\}$$

(c) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_2 = x_3 = x_4 \right\}$$

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(d) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ t \\ s \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné} \right\}$$

Ověření podmínek vektorového podprostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(d) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ t \\ s \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné} \right\}$$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.

Ověření podmínek vektorového podprostoru

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ϱ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li:

(a) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\varrho : 2x + y - z = 0$

(c) $\varrho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\varrho : x + 4y - 2z = 0$

Ověření podmínek vektorového podprostoru

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ϱ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li:

(a) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\varrho : 2x + y - z = 0$

(c) $\varrho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\varrho : x + 4y - 2z = 0$

Příklad z písemky: (a) ne, (b) ano, (c) ne, (d) ano.

Vysvětlení: roviny jsou podprostorem $\mathbb{R}^3$, právě když v nich leží počátek (tedy obsahují nulový vektor $\vec{o}$). Stejně tak to platí i pro přímky ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, případně $\mathbb{R}^2$.

Lineární obal množiny vektorů

Lineárním obalem množiny (ne nutně nezávislých) vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}$ z vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu $\{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{v_k} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \in T\}$ vzniklou jakoukoli lineární kombinací vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}$.

Značíme jej $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k})$ nebo $\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}\rangle$.

Alternativně říkáme, že $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k})$ je podprostor generovaný vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$.

Součet a průnik vektorových podprostorů

Součet a průnik vektorových podprostorů

Součtem $W_1 + W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme lineární obal jejich sjednocení, tj.

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \mid \alpha, \beta \in T, \vec{u} \in W_1, \vec{v} \in W_2\}$$

Průnikem $W_1 \cap W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu vektorů, které leží ve W_1 i W_2 zároveň, tj.

$$W_1 \cap W_2 = \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} \in W_1 \wedge \vec{u} \in W_2\}$$

Věta: Jsou-li W_1, W_2 podprostory s konečnou dimenzí, pak platí

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

Výsledek:

$\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle,$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_2}; \vec{u_3})$.

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}),$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:
$\dim(W_1 + W_2) = 4$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, báze tedy neexistuje.