

# MA0005 Algebra 2, 6. seminář

6. 11. 2024

## 1 Další způsoby řešení SLR

- Gauss-Jordanova metoda řešení SLR
- Princip superpozice

## Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Kovár, M.: *Maticový a tenzorový počet*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky.

# Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

SLR  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  (matice  $A$  je čtvercová) lze zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

# Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

SLR  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  (matice  $A$  je čtvercová) lze zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Je-li matice  $A$  regulární, je možné systém  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  vyřešit tzv.

**Gauss-Jordanovou metodou** založenou na aplikaci elementárních řádkových úprav a dosažení níže uvedeného tvaru:

$$(A|\vec{b}) \sim \dots \sim (E|\vec{y}),$$

přičemž  $E$  je jednotková matice a  $\vec{y}$  je vektor s řešením systému  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ .

# Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & & -z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & & -2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

# Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rclcrcl} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

**Výsledky:** a)  $(x, y, z)^T = (2, -1, 3)^T$ ,

# Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

**Výsledky:** a)  $(x, y, z)^T = (2, -1, 3)^T$ , b)  $(x, y, z)^T = (0, 2, -1)^T$ ,

# Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

**Výsledky:** a)  $(x, y, z)^T = (2, -1, 3)^T$ , b)  $(x, y, z)^T = (0, 2, -1)^T$ ,  
c)  $(x, y, z)^T = (-2, -3, 4)^T$ .



# Homogenní vs. nehomogenní SLR

**Motivační příklad:** Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte oba systémy a porovnejte výsledky.

1. Nehomogenní systém:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

2. Homogenní systém:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

# Homogenní vs. nehomogenní SLR

**Motivační příklad:** Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte oba systémy a porovnejte výsledky.

1. Nehomogenní systém:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

2. Homogenní systém:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

1.  $K = \left\{ \left[ \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R} \right\}$ ,

2.  $K = \left\{ [0, 0, 0, 0]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R} \right\}$

## Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

## Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

**Z předchozího příkladu:**  $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$  je obecné řešení nehomogenního SLR. Volbou  $t = 1$  dostáváme partikulární řešení  $[\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 1]^T$ . Obecné řešení homogenního SLR (tj.  $t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}$ ) je zároveň fundamentálním systémem řešení.

## Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

**Z předchozího příkladu:**  $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$  je obecné řešení nehomogenního SLR. Volbou  $t = 1$  dostáváme partikulární řešení  $[\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 1]^T$ . Obecné řešení homogenního SLR (tj.  $t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}$ ) je zároveň fundamentálním systémem řešení.

## Princip superpozice

Obecné řešení nehomogenního SLR = obecné řešení homogenního SLR + partikulární řešení nehomogenního SLR.

## Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhadneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

## Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhadneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

**Příklad:** Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 9x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -11 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}$$

## Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhadneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

**Příklad:** Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 9x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -11 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}$$

**Výsledek:** obecné řešení homogenního SLR (po volbě  $x_4 = t$ ) je  $t \cdot (-2, 3, 2, 1)^T$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Volbou  $x_4 = 0$  dostaneme toto obecné řešení zadaného systému:  $K = \{[-5, 2, 3, 0]^T + t \cdot (-2, 3, 2, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$ .



**Příklad:** Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

(a)

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 11 \\ x_1 & & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -7 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccccrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 7 \end{array}$$

## Výsledky příkladů

(a) obecné řešení homogenního SLR (po volbě  $x_3 = t, x_4 = s$ ) je

$$\{t \cdot (0, -2, 1, 0)^T + s \cdot (3, -3, 0, 1)^T, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Volbou  $x_3 = x_4 = 0$  dostaneme toto obecné řešení zadaného systému:

$$K = \{[-7, 6, 0, 0]^T + t \cdot (0, -2, 1, 0)^T + s \cdot (3, -3, 0, 1)^T, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

(b) obecné řešení homogenního SLR (po volbě  $x_4 = t$ ) je

$$\{t \cdot (-20, 1, 6, 7)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Volbou  $x_1 = 0$  dostaneme toto obecné řešení zadaného systému:

$$K = \{[0, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}]^T + t \cdot (-20, 1, 6, 7)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$