

MA0005 Algebra 2, 7. seminář

13. 11. 2024

1 Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

- Reprezentace lineárního zobrazení
 - Lineární zobrazení přímky a roviny
 - Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení
-
- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
 - Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: <https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra>.
 - Čadek, M.: Sběrka úloh z lineární algebry. 2002. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~cadek/LA/sbirka.pdf>.
 - Sobotíková, V. Řešené úlohy z Úvodu do algebry. Dostupné z: <http://www.vrstevnice.com/akce/grandaction/vskola/1semestr/lingeбра/resPrikklady.pdf>.

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \rightarrow V'$ splňující tyto dvě podmínky:

$$1 \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}),$$

$$2 \quad \varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \rightarrow V'$ splňující tyto dvě podmínky:

$$1 \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}),$$

$$2 \quad \varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Poznámka: Lineární zobrazení lze zadat třemi způsoby:

- pomocí předpisu mezi souřadnicemi vektoru $\vec{u} \in V$ a $\varphi(\vec{u}) \in V'$,
- pomocí matice A typu $m \times n$, tj. $\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$,
- pomocí obrazů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ báze vektorů prostoru V .

Příklad 1

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V'$ je zadáno předpisem pro vektor $\vec{x} \in V$.

- Najděte matici A zobrazení φ a obrazy standardní báze prostoru V .
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

- 1 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1), \vec{u} = (2, 3)^T, \vec{v} = (-2, 1)^T$.
- 2 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1), \vec{u} = (4, -1, 0)^T, \vec{v} = (-3, 0, 5)^T$.
- 3 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3), \vec{u} = (0, 2, -3)^T, \vec{v} = (-1, 1, 2)^T$.

Výsledky příkladu 1

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(1, 0) = (2, 0, -1)^T, \varphi(0, 1) = (1, 1, 1)^T, \\ \varphi(2, 3) = (7, 3, 1)^T, \varphi(-2, 1) = (-3, 1, 3)^T.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 1)^T, \varphi(0, 1, 0) = (1, 1, 0, 0)^T, \varphi(0, 0, 1) = (0, 1, 1, 0)^T, \\ \varphi(4, -1, 0) = (3, -1, 4, 4)^T, \varphi(-3, 0, 5) = (-3, 5, 2, -3)^T.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0)^T, \varphi(0, 1, 0) = (1, 1)^T, \varphi(0, 0, 1) = (0, 1)^T, \\ \varphi(0, 2, -3) = (2, -1)^T, \varphi(-1, 1, 2) = (0, 3)^T.$$

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V'$ je zadáno obrazy bázových vektorů V .

- Najděte matici A zobrazení φ .
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

1 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(1, 0, 2) = (1, 3)^T, \varphi(-3, 4, -2) = (2, -1)^T, \varphi(0, 2, 1) = (-3, 5)^T,$$
$$\vec{u} = (1, 4, 2)^T, \vec{v} = (-1, 0, 4)^T.$$

2 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(1, 2, -3) = (-2, 1)^T, \varphi(2, 1, -2) = (1, 1)^T, \varphi(1, -4, 5) = (8, -1)^T,$$
$$\vec{u} = (3, 6, -1)^T, \vec{v} = (0, 3, 2)^T.$$

3 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$\varphi(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)^T, \varphi(1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)^T,$$
$$\varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 0, 1)^T,$$
$$\vec{u} = (2, 4, 6)^T, \vec{v} = (-4, 0, 2)^T.$$

Výsledky příkladu 2

$$1. A = \begin{pmatrix} -10 & -\frac{17}{4} & \frac{11}{2} \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(1, 4, 2) = (-16, 15)^T, \varphi(-1, 0, 4) = (32, -9)^T.$$

2. zadané vektory netvoří bázi prostoru $V = \mathbb{R}^3$.

$$3. A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(2, 4, 6) = (2, 4, 2, 4)^T, \varphi(-4, 0, 2) = (-1, 3, -1, 3)^T.$$

Příklad 3

Je dána přímka p a rovina ϱ :

$$p = \{[1 + t, 2 - t, 1 - t]; t \in \mathbb{R}\}$$

$$\varrho : 2x - 3y + z + 1 = 0$$

Zjistěte, na jakou množinu bodů se přímka p a rovina ϱ zobrazí pomocí lineárního zobrazení:

- $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které je zadáno maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které je zadáno maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledky příkladu 3

$$1. \varphi_1(p) = \{[8, 3 - t, 2 + 2t]^T; t \in \mathbb{R}\}$$

$$\varphi_1(\varrho) : x - 2y - z = 0$$

$$2. \varphi_2(p) = \{[4 + t, 3 - 2t, 2 + t]^T; t \in \mathbb{R}\}$$

$$\varphi_2(\varrho) : 8x - 7y - 10z + 3 = 0$$

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Je dáno lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V'$ mezi vektorovými prostory V (dimenze n) a V' (dimenze m).

- 1 Jádrem $\text{Ker } \varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{u} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor, tj.

$$\text{Ker } \varphi = \{\vec{u} \in V \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_{V'}\}.$$

- 2 Oborem hodnot $\text{Im } \varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{v} \in V'$, pro které existuje nějaký vektor, tj.

$$\text{Im } \varphi = \{\vec{v} \in V' \mid \exists \vec{u} \in V : \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}.$$

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Je dáno lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V'$ mezi vektorovými prostory V (dimenze n) a V' (dimenze m).

- 1 Jádrem $\text{Ker } \varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{u} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor, tj.

$$\text{Ker } \varphi = \{ \vec{u} \in V \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_{V'} \}.$$

- 2 Oborem hodnot $\text{Im } \varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{v} \in V'$, pro které existuje nějaký vektor, tj.

$$\text{Im } \varphi = \{ \vec{v} \in V' \mid \exists \vec{u} \in V : \varphi(\vec{u}) = \vec{v} \}.$$

Poznámka:

- $\text{Ker } \varphi$ a $\text{Im } \varphi$ jsou vektorové podprostory.
- $\dim(\text{Ker } \varphi) = n - h(A) = \dim V - h(A)$, kde A je matice lineárního zobrazení φ .
- $\dim(\text{Im } \varphi) = h(A)$.
- $\dim V = \dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi)$.

Příklad 4

Nalezněte jádro a obor hodnot lineárního zobrazení φ a určete jejich dimenze.

1 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$

2 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$

3 $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi(1, 2, 1) = (-1, 1, 1, 1)^T$,
 $\varphi(0, 1, 2) = (1, 0, 0, 1)^T$, $\varphi(1, 0, -1) = (0, 1, 1, 2)^T$.

4 $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, φ je dáno maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledky příkladu 4

- $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0, \text{Ker } \varphi = \{(0, 0, 0)^T\},$
 $\dim(\text{Im } \varphi) = 3, \text{Im } \varphi = \langle \{(1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, 1, 0)^T\} \rangle.$
- $\dim(\text{Ker } \varphi) = 1, \text{Ker } \varphi = \langle \{(1, -1, 1)^T\} \rangle,$
 $\dim(\text{Im } \varphi) = 2, \text{Im } \varphi = \langle \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\} \rangle.$
- $\dim(\text{Ker } \varphi) = 1, \text{Ker } \varphi = \langle \{(0, 3, 4)^T\} \rangle,$
 $\dim(\text{Im } \varphi) = 2, \text{Im } \varphi = \langle \{(-1, 1, 1, 1)^T, (1, 0, 0, 1)^T\} \rangle.$
- $\dim(\text{Ker } \varphi) = 2, \text{Ker } \varphi = \langle \{(-3, -2, 1, 0)^T, (-1, -1, 0, 1)^T\} \rangle,$
 $\dim(\text{Im } \varphi) = 2, \text{Im } \varphi = \langle \{(1, 2, -3)^T, (0, -1, 5)^T\} \rangle.$

Příklad 5

Lineární zobrazení ψ je zadáno pomocí svého jádra a oboru hodnot. Sestrojte matici A_ψ zobrazení ψ . Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.

- (a) $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,
Ker $\psi = ((2; 2; 1; 0)^T, (-5; -3; 0; 1)^T)$,
Im $\psi = ((-1; -3; -1; -1)^T, (1, 4, 3, 2)^T)$.
- (b) $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$,
Ker $\psi = ((2; 2; 1)^T, (1; 0; 1)^T)$,
Im $\psi = ((1; 0; 1; 1)^T)$.
- (c) $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
Ker $\psi = ((2; 0; 2; 1)^T, (0; 1; -1; 1)^T)$,
Im $\psi = ((1; 0; 1)^T, (1; 1; 0)^T)$.

Výsledky příkladu 5

$$(a) \mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$