MA0005 Algebra 2, 8. seminář

20. 11. 2024

Náplň cvičení

1. Matice přechodu
   - Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi
   - Změna matice lineárního zobrazení při změně báze
   - Změna matice lineární transformace při změně báze

Literatura a zdroje

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.
- Fiala, J. a kol. Sbírka úloh z matematiky. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2008. Dostupné z: `https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka`.

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β,

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$, tedy řešení soustavy

$$\beta|\vec{u} = \left(\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array}\right)$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$, tedy řešení soustavy

$$\beta | \vec{u} = \left(\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array} \right)$$

Budeme takovou soustavu řešit pro každý vektor zvlášť?

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})^T$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})^T$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu

Maticí přechodu $P_{\alpha\to\beta}$ od báze α k bázi β rozumíme matici, pro níž platí

$$\beta = \alpha \cdot P_{\alpha\to\beta} \tag{1}$$

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})^T$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu

Maticí přechodu $P_{\alpha\to\beta}$ od báze α k bázi β rozumíme matici, pro níž platí

$$\beta = \alpha \cdot P_{\alpha\to\beta} \tag{1}$$

Poznámka:

- Vektory obou bází se ve vztahu (1) zapisují sloupcově.
- Matice přechodu $P_{\alpha\to\beta}$ je regulární.
- Matice $(P_{\alpha\to\beta})^{-1} = P_{\beta\to\alpha}$ je maticí přechodu od báze β k bázi α a platí tento vztah:

$$\alpha = \beta \cdot P_{\beta\to\alpha} \tag{2}$$

Matice přechodu – příklady

Převádění souřadnic vektorů při změně báze: Při vyjádření souřadnic vektoru v jiné bázi potřebujeme matici přechodu **v opačném směru**:

- $\vec{u}_\beta = P_{\beta\to\alpha} \cdot \vec{u}_\alpha$
- $\vec{v}_\alpha = P_{\alpha\to\beta} \cdot \vec{v}_\beta$

Příklad 1

Jsou dány dvě různé báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte matice přechodu $P_{\beta\to\alpha}, P_{\alpha\to\beta}$ a určete souřadnice vektoru $\vec{u}_\alpha = (1,2,1)^T$ v bázi β a souřadnice vektoru $\vec{v}_\beta = (-1,0,3)^T$ v bázi α.

1. $\alpha = ((1,0,1)^T; (2,1,1)^T; (0,0,2)^T)$,
   $\beta = ((0,1,1)^T; (1,0,2)^T; (2,0,2)^T)$.
2. $\alpha = ((1,0,2)^T; (2,1,1)^T; (3,2,4)^T)$,
   $\beta = ((1,2,0)^T; (2,2,4)^T; (0,1,-3)^T)$.
3. $\alpha = ((1,2,0)^T; (2,1,1)^T; (1,0,1)^T)$,
   $\beta = ((2,2,1)^T; (1,2,1)^T; (0,0,2)^T)$.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 1

1. $P_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha\to\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)^T_\alpha = (2,-2,\frac{7}{2})^T_\beta, (-1,0,3)^T_\beta = (8,-1,-1)^T_\alpha$

2. $P_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $P_{\alpha\to\beta} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)^T_\alpha = (-20,14,16)^T_\beta, (-1,0,3)^T_\beta = (-4,3,-1)^T_\alpha$

3. $P_{\beta\to\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{\alpha\to\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)^T_\alpha = (4,-2,\frac{1}{2})^T_\beta, (-1,0,3)^T_\beta = (5,-12,17)^T_\alpha$

Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích U, V. Pro zadané báze α prostoru U a β prostoru V určete matice $A_{S\to\alpha}, A_{\beta\to S}, A_{\beta\to\alpha}$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
   $\alpha = ((1,2)^T; (-2,1)^T)$, $\beta = ((1,1,1)^T; (1,1,0)^T; (1,2,0)^T)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   $\alpha = ((1,0,1)^T; (1,1,1)^T; (1,2,0)^T)$,
   $\beta = ((1,2,-1,0)^T; (0,1,-1,-2)^T; (-1,0,0,-2)^T; (2,1,0,-3)^T)$.

Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích U, V. Pro zadané báze α prostoru U a β prostoru V určete matice $A_{S\to\alpha}, A_{\beta\to S}, A_{\beta\to\alpha}$.

3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
   $\alpha = ((1,1,1)^T; (1,0,4)^T; (1,4,0)^T)$,
   $\beta = ((1,0)^T; (4,1)^T)$.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 2

1. $A_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{\beta\to S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $A_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{\beta\to S} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 12 \\ -11 & -5 & -19 \\ 3 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} & 3 & 2 \\ -\frac{30}{7} & -5 & -3 \\ \frac{19}{7} & 3 & 1 \\ \frac{5}{7} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A_{\beta\to S} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$A_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} -6 & -15 & -11 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Změna matice lineární transformace při změně báze – příklady

Příklad 3

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí A_S ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Pro bázi

$$\alpha = ((1,1,1)^T; (1,1,0)^T; (1,2,0)^T)$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ určete matice $A_{S\to\alpha}, A_{\alpha\to S}, A_{\alpha\to\alpha}$.

1. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,
2. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Výsledky Příkladu 3

1. $A_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha\to S} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{\alpha\to\alpha} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $A_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha\to S} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{\alpha\to\alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -5 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Výsledky Příkladu 3

3. $A_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha\to S} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_{\alpha\to\alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -3 & -9 & -14 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.