

MA0005 Algebra 2, 9. seminář

27. 11. 2024

- 1 Ortogonalita vektorů
- 2 Gram-Schmidtův ortogonalizační proces
- 3 Ortogonální doplněk
- 4 Ortogonální projekce vektoru

Literatura a zdroje

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Ortogonální vektory

Vektory \vec{u}, \vec{v} v Euklidovském prostoru jsou ortogonální, jestliže pro jejichž skalární součin platí: $skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Poznámka: Ortogonálnost vektorů narozdíl od kolmosti připouští, že jeden z nich, případně oba byly nulové.

Ortogonalní vektory

Vektory \vec{u}, \vec{v} v Euklidovském prostoru jsou ortogonální, jestliže pro jejichž skalární součin platí: $skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Poznámka: Ortogonalnost vektorů narozdíl od kolmosti připouští, že jeden z nich, případně oba byly nulové.

Ortogonalní/ortonormální posloupnost vektorů

Báze podprostoru, nebo libovolná posloupnost vektorů je

- **ortogonalní**, jestliže každé dva vektory z této báze (posloupnosti) jsou ortogonální.
- **ortonormální**, jestliže je ortogonalní a každý její vektor je normovaný (tj. jeho velikost je 1).

Poznámka: Velikost vektoru $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je v Euklidovském prostoru definována takto: $\|u\| = \sqrt{skal(\vec{u}, \vec{u})} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$.

Ortogonalní a ortonormální vektory – příklady

Příklad 6.2.B1: Rozhodněte, zda dané vektory euklidovského prostoru \mathbb{R}^4 jsou ortogonální, resp. ortonormální.

a) $\vec{u} = (1; -2; 2; 1)$, $\vec{v} = (1; 3; 2; 1)$, $\vec{w} = (-1; 0; 1; -1)$

b) $\vec{u} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

c) $\vec{u} = (2; 3; -3; -4)$, $\vec{v} = (-1; 3; -3; 4)$, $\vec{w} = (3; 1; 3; 0)$

d) $\vec{u} = (1; 3; 1; 2)$, $\vec{v} = (0; 0; 0; 0)$, $\vec{w} = (1; -3; 2; 3)$

Příklad 6.2.B2: Určete parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané vektory euklidovského prostoru \mathbb{R}^5 byly ortogonální.

a) $\vec{u} = (1; 1; 2; 0; 0)$, $\vec{v} = (1; -1; 0; 1; a)$, $\vec{w} = (1; b; 2; 3; -2)$

b) $\vec{u} = (2; -1; 0; a; b)$, $\vec{v} = (a; b; 0; -2; 1)$, $\vec{w} = (a; 2b; 5; b; -a)$

c) $\vec{u} = (1; -2; a; 3; 0)$, $\vec{v} = (-1; 1; 0; a; 7)$, $\vec{w} = (1; -2; b; 3; 0)$,
 $\vec{z} = (0; b; -1; 1; 8)$

d) $\vec{u} = (1; 2; 0; 2; 1)$, $\vec{v} = (0; 0; 0; 0; 0)$, $\vec{w} = (-5; 2; 5; -2; 5)$,
 $\vec{z} = (a; b; 0; b; a)$

Výsledky:

B1 a) ortogonální, b) ortonormální, c) nejsou ortogonální, d) ortogonální

B2 a) $a = \frac{9}{2}$, $b = -5$, b) $(a = b = 0) \vee (a = b = 1)$, c) žádné neexistují,
d) $a = -2b$

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Bud' $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ tak, že $\langle (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) \rangle = \langle (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) \rangle$.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ tak, že $\langle\langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle\rangle = \langle\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \rangle\rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

a) $\vec{e}_1 = \vec{u}_1$.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ tak, že $\langle(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)\rangle = \langle(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)\rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

- $\vec{e}_1 = \vec{u}_1$.
- Hledáme vektor \vec{e}_2 tak, že vyjádření $\vec{e}_2 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$ skalárně vynásobíme vektorem \vec{e}_1 . Díky ortogonalitě vektorů \vec{e}_1, \vec{e}_2 dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot \text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \text{skal}(\vec{u}_2, \vec{e}_1) \\ p_1 &= -\frac{\text{skal}(\vec{u}_2, \vec{e}_1)}{\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} \end{aligned}$$

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ tak, že $\langle(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)\rangle = \langle(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)\rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

- $\vec{e}_1 = \vec{u}_1$.
- Hledáme vektor \vec{e}_2 tak, že vyjádření $\vec{e}_2 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$ skalárně vynásobíme vektorem \vec{e}_1 . Díky ortogonalitě vektorů \vec{e}_1, \vec{e}_2 dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot \text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \text{skal}(\vec{u}_2, \vec{e}_1) \\ p_1 &= -\frac{\text{skal}(\vec{u}_2, \vec{e}_1)}{\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} \end{aligned}$$

- Podobně vyjádření $\vec{e}_3 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3$ vynásobíme jednou vektorem \vec{e}_1 , podruhé \vec{e}_2 . Dostaneme dvě rovnice, z nichž opět získáme hodnoty p_1, p_2 .

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ tak, že $\langle (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) \rangle = \langle (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) \rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

- $\vec{e}_1 = \vec{u}_1$.
- Hledáme vektor \vec{e}_2 tak, že vyjádření $\vec{e}_2 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2$ skalárně vynásobíme vektorem \vec{e}_1 . Díky ortogonalitě vektorů \vec{e}_1, \vec{e}_2 dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot \text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \text{skal}(\vec{u}_2, \vec{e}_1) \\ p_1 &= -\frac{\text{skal}(\vec{u}_2, \vec{e}_1)}{\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} \end{aligned}$$

- Podobně vyjádření $\vec{e}_3 = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3$ vynásobíme jednou vektorem \vec{e}_1 , podruhé \vec{e}_2 . Dostaneme dvě rovnice, z nichž opět získáme hodnoty p_1, p_2 .
- Takto podobně postupujeme dále.

Příklad 6.2.B7: V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru W , je-li:

- a) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \rangle$, kde
 $\vec{u}_1 = (1; 2; 2; -1)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; -5; 3)$, $\vec{u}_3 = (3; 2; 8; -7)$
- b) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \rangle$, kde
 $\vec{u}_1 = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{u}_2 = (0; 1; 0; -7)$, $\vec{u}_3 = (3; -2; 3; 14)$
- c) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) \rangle$, kde $\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1)$,
 $\vec{u}_2 = (1; 1; 1; -1)$, $\vec{u}_3 = (1; -1; -1; 1)$, $\vec{u}_4 = (-1; 1; 1; 1)$
- d) $V = \mathbb{R}^5$, $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) \rangle$, kde $\vec{u}_1 = (1; -2; -1; 0; 1)$,
 $\vec{u}_2 = (2; 3; 0; -2; 3)$, $\vec{u}_3 = (1; 1; -2; -1; -1)$, $\vec{u}_4 = (1; -6; -4; 1; -2)$
- e) $V = \mathbb{R}^5$, $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) \rangle$, kde $\vec{u}_1 = (1; 2; 0; 1; 2)$,
 $\vec{u}_2 = (1; 1; 3; 0; 1)$, $\vec{u}_3 = (1; 3; -3; 2; 3)$, $\vec{u}_4 = (1; -1; 9; -2; -1)$

Příklad 6.2.B7: hledaných bází je nekonečně mnoho. Jedna z nich je např.:

- a) $((1; 2; 2; -1), (2; 3; -3; 2), (2; -1; -1; -2))$
- b) $((1; 0; 1; 0), (0; 1; 0; -7))$
- c) $((1; 1; 1; 1), (1; 1; 1; -3), (4; -2; -2; 0))$
- d) $((1; -2; -1; 0; 1), (1; 1; -2; -1; -1), (69; 93; 36; -63; 153))$
- e) $((1; 2; 0; 1; 2), (1; 0; 6; -1; 0))$

Ortogonalní množiny vektorů

Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když pro každý libovolná dvojice vektorů $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$ je ortogonální. Značíme $A \perp B$.

Poznámka: Je-li $A \perp B$, pak jsou ortogonální i podprostory $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ generované vektory obou množin.

Ortogonální množiny vektorů

Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když pro každou libovolnou dvojici vektorů $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$ je ortogonální. Značíme $A \perp B$.

Poznámka: Je-li $A \perp B$, pak jsou ortogonální i podprostory $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ generované vektory obou množin.

Ortogonální doplněk podprostoru

Buď U vektorový podprostor euklidovského prostoru V . Ortogonálním doplňkem U^\perp podprostoru U v prostoru V rozumíme množinu všech vektorů ortogonálních k U , tj.

$$U^\perp = \{ \vec{x} \in V \mid \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}) = 0, \quad \forall \vec{u} \in U \}$$

Poznámka: Ortogonální doplněk U^\perp je též vektorovým podprostorem a platí: $V = U + U^\perp$ (tj. $U \cap U^\perp = \vec{0}$ a $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$).

Příklad 6.2.B15: V euklidovském prostoru \mathbb{R}^4 je dán podprostor W . Nalezněte bázi ortogonálního doplňku W^\perp , je-li:

- a) $W = \{(2r + t; -3r + s - t; 4r + 3t; 8r + 5t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$
- b) $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \rangle$, kde
 $\vec{u}_1 = (3; -5; 4; 1)$, $\vec{u}_2 = (1; -2; 2; -3)$, $\vec{u}_3 = (1; -1; 0; 7)$
- c) $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) \rangle$, kde
 $\vec{u}_1 = (3; 2; 1; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; -2; 1)$, $\vec{u}_3 = (1; 1; 0; 1)$, $\vec{u}_4 = (2; 3; -1; 1)$
- d) W je podprostor řešení homogenního SLR:

$$\begin{array}{rccccrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & & - & 2x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \\ & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Příklad 6.2.B15: V euklidovském prostoru \mathbb{R}^4 je dán podprostor W . Nalezněte bázi ortogonálního doplnku W^\perp , je-li:

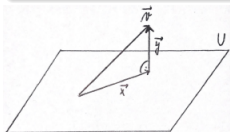
- a) $W = \{(2r + t; -3r + s - t; 4r + 3t; 8r + 5t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$
- b) $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \rangle$, kde
 $\vec{u}_1 = (3; -5; 4; 1)$, $\vec{u}_2 = (1; -2; 2; -3)$, $\vec{u}_3 = (1; -1; 0; 7)$
- c) $W = \langle (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) \rangle$, kde
 $\vec{u}_1 = (3; 2; 1; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; -2; 1)$, $\vec{u}_3 = (1; 1; 0; 1)$, $\vec{u}_4 = (2; 3; -1; 1)$
- d) W je podprostor řešení homogenního SLR:

$$\begin{array}{rccccrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & & - & 2x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \\ & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Výsledky: a) např. $((2; 0; 1; -1))$, b) např. $((2; 2; 1; 0), (17; 10; 0; -1))$,
c) neexistuje, d) např. $((3; 3; 2; 7), (3; 0; -2; -9), (0; 0; 1; 1))$

Ortogonalní projekce vektoru

Ortogonalní projekce nenulového vektoru \vec{v} do podprostoru U je vektor \vec{x} takový, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{v}$, kde $\vec{x} \in U, \vec{y} \in U^\perp$.



Poznámka:

- Ortogonalní projekci, někdy též **kolmý průmět**, je možné provádět v euklidovském prostoru, v němž je díky skalárnímu součinu definován pojem kolmosti vektorů.
- Pomocí orthogonalní projekce vektoru lze spočítat jeho odchylku od zadaného podprostoru (určíme ji jako úhel, který svírá vektor se svým kolmým průmětem do podprostoru).

Ortogonální projekce vektoru – příklady

Příklad 6.2.B18: V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální projekci vektoru u do podprostoru W , je-li:

- a) $V = \mathbb{R}^3$; $\vec{u} = (3; -7; 8)$; $W = \langle(\vec{w}_1, \vec{w}_2)\rangle$, kde
 $\vec{w}_1 = (1; 1; -2)$, $\vec{w}_2 = (3; 1; -1)$
- b) $V = \mathbb{R}^4$; $\vec{u} = (-2; 2; 2; 5)$; $W = \langle(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)\rangle$, kde
 $\vec{w}_1 = (1; 1; -1; 2)$, $\vec{w}_2 = (3; 1; 0; 1)$, $\vec{w}_3 = (2; 0; 1; -1)$
- c) $V = \mathbb{R}^4$; $\vec{u} = (2; 7; -3; -6)$;
 $W = \{(r + s; r + s; -r - 3s; 2r + 3s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
- d) $V = \mathbb{R}^4$; $\vec{u} = (1; 2; 3; 4)$; $W = \langle(0; 1; 0; 1)\rangle$
- e) $V = \mathbb{R}^4$; $\vec{u} = (2; 0; 1; -4)$; W je podprostor řešení homogenního SLR:

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

Příklad 6.2.B18 – výsledky:

a) $(\frac{34}{15}; -\frac{10}{3}; \frac{142}{15})$

b) $(-1; 1; -2; 3)$

c) $(0; 0; 0; 0)$

d) $(0; 3; 0; 3)$

e) $(\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4})$