Analytická geometrie 3 – roviny

Petra Bušková

Podzim 2023

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU
Národní plán obnovy
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Analytické vyjádření roviny

Pro jednoznačné určení roviny v prostoru potřebujeme 3 různé body, případně 1 bod a dva různé směrové vektory (lineárně nezávislé) nebo 1 bod a normálový vektor. Podobně jako tomu bylo u přímky v rovině, i rovinu v prostoru můžeme vyjádřit těmito způsoby:

- parametrické vyjádření roviny,
- obecná rovnice roviny.

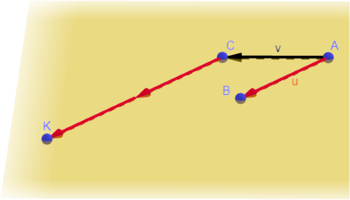
Každé z těchto vyjádření má své výhody i nevýhody.

Obecná rovnice roviny působí jednodušeji a na základě porovnání dvou obecných rovnic rovin lze velmi snadno rozpoznat jejich vzájemnou polohu.

Pro parametrické vyjádření roviny není nutné hledat pomocí vektorového součinu normálový vektor roviny. Navíc pokud bychom s rovinou pracovali v prostoru dimenze 4 a více, parametrické vyjádření by bylo stále platné.

Parametrické vyjádření roviny

Parametrické vyjádření roviny pracuje s principem přičítání různých násobků **dvou lineárně nezávislých směrových vektorů** roviny ρ k **bodu** ležícímu v dané rovině.
Směrové vektory roviny získáme podobně jako u přímky jako vektory určené libovolnými dvěma body této roviny.
Do každého bodu roviny lze dospět přičtením určité lineární kombinace směrových vektorů k danému bodu. Například na obrázku získáme bod K následovně: $K = A + 2 \cdot \vec{u} + \vec{v}$.



$$\rho : X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \qquad t, s \in \mathbf{R}$$

Parametrické vyjádření roviny – příklady

Pro rovinu určenou bodem $A[a_1, a_2, a_3]$ a směrovými vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ platí:

$$\begin{aligned} \rho : x &= a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2 \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3 \qquad t, s \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Příklad 1

Zjistěte, zda bod $X[-1; -1; 3]$ leží v rovině určené body $A[1; 2; -1]$, $B[3; 1; 1]$, $C[-1; 1; 0]$.

Parametrické vyjádření roviny – příklady

Příklad 2

Zjistěte, zda bod $M[3;0;1]$ leží v rovině α určené bodem $A[1;1;3]$ a přímkou p, na níž leží bod $P[3;-1;-7]$ a která má směrový vektor $\vec{u} = (1;1;1)$

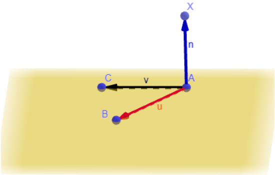
Příklad 3

Je dána rovina ρ. Určete její průsečíky se souřadnými osami a napište rovnice přímek, ve kterých rovina ρ protíná souřadné roviny (xy, yz, yz), tj. napište rovnice průsečnic těchto rovin.

$$
\begin{aligned}
\rho : x &= 1 + t + k \\
y &= 2 + 3t - k \\
z &= 5t + k \qquad t, k \in \mathbf{R}
\end{aligned}
$$

Obecná rovnice roviny

Stejně jako v obecné rovnici přímky se objevuje **normálový vektor** této přímky, tak také v obecné rovnici roviny se objevuje její normálový vektor. Je to vektor, který je **kolmý na každý směrový vektor** roviny.
Rozmyslete si, že v trojrozměrném prostoru je tento vektor až na nenulový násobek jednoznačně daný. Ve vyšších dimenzích by to už neplatilo, jeden normálový vektor a jeden bod by například ve čtyřrozměrném prostoru popisoval trojrozměrný prostor.



$$\rho : ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}$$
$$\vec{n} = (a, b, c)$$

Normálový vektor roviny můžeme spočítat ze dvou lineárně nezávislých směrových vektorů pomocí vektorového součinu (viz prezentace Analytická geometrie 1 – vektory).
Po dosazení některého bodu ležícího v rovině dopočítáme koeficient d.

Příklady

Příklad 4

Určete obecnou rovnici roviny α určené body $A[1,-1,3]$, $B[1,0,1]$, $C[2,-3,4]$. Najděte průsečíky roviny α se souřadnými osami.

Příklad 5

Určete obecnou rovnici roviny β.

$$\begin{aligned} \beta : x &= 1 - t \\ y &= -3 + s \\ z &= t - s \qquad t, s \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Příklad 6

Napište parametrické vyjádření roviny $\gamma : 8x + 3y - 5z - 1 = 0$.

Vzájemná poloha přímky a roviny, vzájemná poloha dvou rovin

Vzájemnou polohu přímky a roviny v trojrozměrném prostoru lze rozlišit pomocí počtu průsečíků:

- žádný průsečík – přímka je s rovinou **rovnoběžná**
- jeden průsečík – přímka je s rovinou **různoběžná**
- nekonečně mnoho průsečíků – přímka **náleží** rovině (nelze říci, že jsou přímka a roviny totožné, jedná se totiž o dva různé objekty)

Podobně lze rozlišovat vzájemnou polohu dvou rovin:

- žádný průsečík – roviny jsou **rovnoběžné**
- společná přímka (průsečnice) – roviny jsou **různoběžné**
- všechny body společné – roviny jsou **totožné**

Při vyšetřování vzájemné polohy přímky a roviny, případně dvou rovin, je vhodné vždy pracovat s vektorem, který je pro daný objekt jednoznačně určený. Takovým vektorem je v prostoru pro přímku **směrový** vektor a pro rovinu vektor **normálový**.

Vzájemná poloha dvou rovin – příklad

Určeme vzájemnou polohu rovin α a β. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečnici.

a) $\alpha: 2x - 5y + 4z - 10 = 0, \beta: 4x - 10y + 8z - 10 = 0$

b) $\alpha: 2x - 5y + 4z - 10 = 0, \beta: x - y - z - 2 = 0$

Řešení:

Všechny roviny máme příhodně zapsané pomocí obecných rovnic, můžeme tedy porovnat jejich normálové vektory, a tak poznat, zda jsou různoběžné, či nikoliv. Následně řešíme jako soustavu dvou rovnic.

a) Normálové vektory daných rovin jsou následující:
$\vec{n_\alpha} = (2; -5; 4), \vec{n_\beta} = (4; -10; 8)$. Protože $\vec{n_\beta} = 2\vec{n_\alpha}$, musí být roviny rovnoběžné, nebo totožné.
Pokud bychom se na obecné rovnice rovin podívali jako na soustavu dvou rovnic a řešili ji (tedy pokud bychom hledali průsečíky těchto rovin), brzy bychom přišli na to, že daná soustava nemá řešení.
Roviny tedy nemají žádný společný bod – jsou **rovnoběžné**.

Vzájemná poloha dvou rovin – pokračování příkladu

b) Normálové vektory daných rovin jsou následující:
$\vec{n_\alpha} = (2; -5; 4)$, $\vec{n_\beta} = (1; -1; -1)$. Vektory jsou lineárně nezávislé, proto musí být roviny **různoběžné**. Hledejme tedy průsečnici jako řešení soustavy obecných rovnic rovin.

$$\begin{array}{rl}
2x - 5y + 4z - 10 = 0 & \\
x - y - z - 2 = 0 & \quad \backslash \cdot (-2) \\
\hline
-3y + 6z - 6 = 0 & \\
-y + 2z - 2 = 0 & \rightarrow z = t; y = 2t - 2
\end{array}$$

Po dosazení získáváme $x = 3t$.

Dohromady tedy získáváme parametrické vyjádření průsečnice:
$p : \{[3t; 2t - 2; t], t \in \mathbf{R}\}$.

Příklady

Příklad 7

Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečík.
$p : \{[2; 3 - 2t; -5t], t \in \mathbf{R}\}, \rho : \{[-s - 2r; 2 - s - r; -s + r], s, r \in \mathbf{R}\}$

Příklad 8

Určete vzájemnou polohu rovin α a β. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečnici. $\alpha : 2x - 5y + 4z - 10 = 0, \beta : 4x - 10y - 2z - 10 = 0$

Příklad 9

Je dána rovina $\alpha : 2x + 3y - z - 6 = 0$ a přímka p,
$p : x = 1 - t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 4 + 3t, \qquad t \in \mathbf{R}.$
Určete jejich vzájemnou polohu, případně nalezněte průsečík. Napište rovnici přímky q, která je pravoúhlým průmětem přímky p do roviny α.

Řešení příkladů

Příklad 1: $X \in ABC$
Příklad 2: $M \notin \alpha$
Příklad 3: $P_x[2;0;0]$, $P_y[0;4;0]$, $P_z[0;0;-4]$
$\mathrm{p}_{xy}: \{[2+r;-2r;0], r \in \mathbf{R}\}$, $p_{yz}: \{[0;4+s;s], s \in \mathbf{R}\}$,
$\mathrm{p}_{xz}: \{[2+l;0;2l], l \in \mathbf{R}\}$
Příklad 4: $\alpha: 3x - y - 5z + 2 = 0$ nebo libovolný nenulový násobek
Příklad 5: $\beta: x + y + z + 2 = 0$ nebo libovolný nenulový násobek
Příklad 6: například $\gamma: \{[1+3t+5s; 1-8t; 2+8s], t, s \in \mathbf{R}\}$
Bod nalezneme dosazením libovolných dvou souřadnic a dopočítáním třetí. Podobně získáme dva směrové vektory roviny, pro které musí platit, že výsledkem jejich skalárního součinu s normálovým vektorem je nula.
Příklad 7: přímka je s rovinou různoběžná, průsečík $P[2;5;5]$
Příklad 8: roviny jsou různoběžné, průsečnicí je přímka
$p: \{[3+5t; 2t; 1], t \in \mathbf{R}\}$
Příklad 9: přímka je s rovinou různoběžná, průsečík $P[-1;6;10]$,
$q: \{[-1+16s; 6-25s; 10-43s], s \in \mathbf{R}\}$