MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 10

Převážnou část posledního cvičení věnujeme vlastním číslům a vlastním vektorům lineární transformace $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V. Ve *Skriptech* je tomu věnována Kapitola 11 (Týden 11) na str. 109–114. Na závěr si ukážeme dva příklady využívající vaše dosavadní znalosti o lineárních zobrazeních.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU · Národní plán obnovy · Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

10.1 Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem (směrem) lineární transformace $\varphi : V \to V$ rozumíme vektor $\vec{v} \in V$ takový, že

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo (hodnota) příslušející vlastnímu vektoru $\vec{v}$, který se tedy pomocí φ zobrazí na svůj vlastní λ-násobek. Platí, že vlastní vektory jsou lineárně nezávislé, a každý z nich tvoří vektorový podprostor.

Řešený příklad 10.1.a

Zadání[1]

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Řešení

Z definice vlastního vektoru platí $(\varphi(\vec{v}) =)\ C \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$. Pokud tuto rovnici vynásobíme zleva jednotkovou maticí a upravíme, dostáváme:

$$\begin{aligned} C \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot \vec{v} \quad / \cdot E \\ E \cdot C \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{v} \\ C \cdot \vec{v} - \lambda \cdot E \cdot \vec{v} &= \vec{0} \\ \vec{v} \cdot (C - \lambda \cdot E) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Je patrné, že vektor $\vec{v}$ leží v jádru transformace dané maticí $C - \lambda \cdot E$. Hledáme číslo λ tak, aby byl tento vektor nenulový. V jádru takové transformace leží nenulový vektor právě tehdy, když má systém $\vec{v} \cdot (C - \lambda \cdot E) = \vec{0}$ nekonečně mnoho řešení, tedy determinant matice $C - \lambda \cdot E$ je nulový. To znamená

$$0 = |C - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (-2-\lambda)$$

Rovnice $(1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (-2-\lambda) = 0$ platí pro tři různé vlastní hodnoty, k nimž najdeme vlastní vektory:

- $\lambda_1 = 1$: dosadíme do systému $\vec{v} \cdot (C - \lambda \cdot E) = \vec{0}$ a spočítáme jeho řešení:

$$\begin{pmatrix} 1-\mathbf{1} & 0 & 0 \\ -1 & 3-\mathbf{1} & 0 \\ 3 & 2 & -2-\mathbf{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{škrtni} \\ \\ +3r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

  Zpětným chodem začneme u druhé rovnice $8x_2 - 3x_3 = 0$. Položíme $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$, platí $8x_2 = 3t$, z čehož $x_2 = \frac{3}{8}t$. Vyjádření x_2 dosadíme

[1] Úloha 11.6 ze *Skript* na str. 116

do 1. rovnice $-x_1 + 2x_2 = 0$. Dostaneme $-x_1 + 2 \cdot \frac{3}{8}t = 0$, z čehož dostáváme $x_1 = \frac{6}{8}t$. Vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ je vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6/8 \\ 3/8 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_2 = 3$: dosadíme do systému $\vec{v} \cdot (C - \lambda \cdot E) = \vec{0}$ a spočítáme jeho řešení:

$$\begin{pmatrix} 1\mathbf{-3} & 0 & 0 \\ -1 & 3\mathbf{-3} & 0 \\ 3 & 2 & -2\mathbf{-3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2r_2 \\ \\ +3r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Zpětným chodem začneme u poslední rovnice $2x_2 - 5x_3 = 0$. Položíme $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$, tedy platí $2x_2 = 5t$, z čehož $x_2 = \frac{5}{2}t$. Zbývající nenulový řádek znamená rovnici $-x_1 = 0$, z níž rovnou dostaneme $x_1 = 0$. Vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě $\lambda_2 = 3$ je vektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_3 = -2$: dosadíme do systému $\vec{v} \cdot (C - \lambda \cdot E) = \vec{0}$ a spočítáme jeho řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 - (\mathbf{-2}) & 0 & 0 \\ -1 & 3 - (\mathbf{-2}) & 0 \\ 3 & 2 & -2 - (\mathbf{-2}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +3r_2 \\ \\ +3r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{škrtni} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Zpětným chodem začneme u druhého řádku, který znamená rovnici $17x_2 = 0$, z níž rovnou vychází $x_2 = 0$. První řádek můžeme přepsat do rovnice $-x_1 + 5x_2 = 0$. Dosadíme do ní x_2 a máme $x_1 = 0$. Zřejmě x_3 může nabývat libovolné hodnoty, tedy $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě $\lambda_3 = -2$ je vektor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešený příklad 10.1.b

Zadání

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Řešení

Z definice vlastního vektoru $\vec{v}$ platí rovnice $A_\varphi \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$, po jejíž úpravě dostaneme

$$\vec{v} \cdot (A_\varphi - \lambda \cdot E_3) = \vec{0},$$

Spočítáme determinant matice $A_\varphi - \lambda \cdot E_3$ a položíme jej roven nule:

$$\begin{aligned}
|A_\varphi - \lambda \cdot E| &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda) - [(-1-\lambda) \cdot (-1)^2 + (-1-\lambda) \cdot 2^2] \\
&= (1 + 2\lambda + \lambda^2) \cdot (3-\lambda) + 1 + \lambda + 4 + 4\lambda \\
&= [3 + 6\lambda + 3\lambda^2 - \lambda - 2\lambda^2 - \lambda^3] + 5 + 5\lambda \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + 10\lambda + 8 = 0
\end{aligned}$$

Poslední rovnici vynásobíme -1, čímž dostaneme kubickou rovnici

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 10\lambda - 8 = 0,$$

pro níž se pokusíme najít celočíselné kořeny pomocí Hornerova schématu:

	1	−1	−10	−8
1	1	0	−10	−18
−1	1	−2	−8	0
−1	1	−3	−5	
2	1	0	−8	
−2	1	−4	0	
4	1	0		

Zeleně jsme vyznačili kořeny kubické rovnice odpovídající vlastním číslům, k nimž nyní najdeme vlastní vektory:

- $\lambda_1 = -1$ dosadíme do systému $A_\varphi - \lambda \cdot E = 0$ a najdeme řešení:

$$\begin{pmatrix} -1-(\mathbf{-1}) & 2 & 0 \\ 2 & 3-(\mathbf{-1}) & -1 \\ 0 & -1 & -1-(\mathbf{-1}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2r_3 \\ +4r_3 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{škrtni} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zpětný chod: druhý řádek je rovnicí $-x_2 = 0$, z čehož okamžitě dostáváme $x_2 = 0$. První řádek znamená rovnici $2x_1 - x_3 = 0$. Zvolíme $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ a dosadíme: $2x_1 - t = 0$, z čehož po úpravě dostáváme $x_1 = \frac{1}{2}t$. Vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě $\lambda_1 = -1$ je vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_2 = -2$ dosadíme do systému $A_\varphi - \lambda \cdot E = 0$ a najdeme řešení:

$$\begin{pmatrix} -1-(\mathbf{-2}) & 2 & 0 \\ 2 & 3-(\mathbf{-2}) & -1 \\ 0 & -1 & -1-(\mathbf{-2}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{škrtni} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zpětný chod: druhý řádek je rovnicí $x_2 - x_3 = 0$, z čehož okamžitě dostáváme $x_2 = x_3$. Zvolíme $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$, a tedy: $x_2 = t$. První řádek přepíšeme do rovnice $x_1 + 2x_2 = 0$, dosadíme za x_2 a po úpravě dostáváme $x_1 = -2t$. Vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě $\lambda_2 = -2$ je vektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_3 = 4$ dosadíme do systému $A_\varphi - \lambda \cdot E = 0$ a najdeme řešení:

$$\begin{pmatrix} -1-\mathbf{4} & 2 & 0 \\ 2 & 3-\mathbf{4} & -1 \\ 0 & -1 & -1-\mathbf{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 5r_2 + 2r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{škrtni} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Zpětný chod: druhý řádek je rovnicí $-x_2 - 5x_3 = 0$, z čehož dostáváme $x_2 = -5x_3$. Zvolíme $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$, a tedy: $x_2 = -5t$. První řádek přepíšeme do rovnice $-5x_1 + 2x_2 = 0$, dosadíme za x_2 a po úpravě dostáváme $x_1 = -2t$. Vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě $\lambda_3 = 4$ je vektor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Všimněte si u předchozího příkladu matice A_φ. Je totiž symetrická. To má za následek několik faktů:

1. Vlastní vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ tvoří ortogonální bázi transformace φ, viz *Skripta* a Věta 29 na str. 113.

2. K transformaci φ existuje dle Věty 30 (viz *Skripta*, str. 113) **diagonální** matice D složená z vlastních čísel na hlavní diagonále:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Podrobněji viz *Skripta* a text na str. 113–114 věnovaný **podobným** maticím a diagonální maticím lineární transformace φ, jejíž matice A_φ je symetrická.

Řešený příklad 10.1.c

Zadání

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí ve standardní bázi:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ x & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vlastními čísly φ jsou $\lambda_1 = 8,\ \lambda_{2,3} = 0$.

1. Vypočítejte hodnotu prvku x.
2. Určete vlastní vektory lineární transformace φ odpovídající vlastním číslům $\lambda_1 = 8,\ \lambda_{2,3} = 0$.

Řešení

Spočítejme nejdříve determinant z matice $A_\varphi - \lambda \cdot E$:

$$\begin{aligned}
|A_\varphi - \lambda \cdot E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 4-\lambda & -6 \\ x & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \color{red}{+[(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 2\cdot(-2)\cdot(-3) + x\cdot 2\cdot(-6)]} \\
&\quad \color{blue}{-[x\cdot(4-\lambda)\cdot(-3) + (1-\lambda)\cdot(-2)\cdot(-6) + 2\cdot 2\cdot(3-\lambda)]} \\
&= (1-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 12 - 12x + 12x - 3x\lambda - 12 + 12\lambda - 12 + 4\lambda \\
&= (1-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 3x\lambda + 16\lambda - 12
\end{aligned}$$

Když do posledního výrazu, který položíme roven 0, dosadíme obě vlastní čísla, měli bychom zjistit hodnotu neznámé x:

- $\lambda = 0 : (1-0)\cdot(4-0)\cdot(3-0) - 3x\cdot 0 + 16\cdot 0 - 12 = 12 - 12 = 0.$
- $\lambda = 8 : (1-8)\cdot(4-8)\cdot(3-8) - 3x\cdot 8 + 16\cdot 8 - 12 = -24 - 24x = 0,$ z čehož $x = -1$.

Nyní určíme vlastní vektory k vlastním číslům $\lambda_1 = 8,\ \lambda_{2,3} = 0$:

- $\lambda_1 = 8$ dosadíme do systému $A_\varphi - \lambda \cdot E = 0$ a najdeme řešení:

$$\begin{pmatrix} 1-\color{red}{\mathbf{8}} & 2 & -3 \\ 2 & 4-\color{red}{\mathbf{8}} & -6 \\ -1 & -2 & 3-\color{red}{\mathbf{8}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{\mathbf{-1}} & -2 & -5 \\ 2 & -4 & -6 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ -7r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{-8}} & -16 \\ 0 & 16 & 32 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -8 & -16 \\ \color{green}{\mathbf{0}} & \color{green}{\mathbf{0}} & \color{green}{\mathbf{0}} \end{pmatrix}$$

Zpětný chod: poslední nenulový řádek je rovnicí $-8x_2 - 16x_3 = 0$. Pokud zvolíme $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ a dosadíme do uvedené rovnice, dostaneme po úpravě $x_2 = -2t$. Obě vyjádření vložíme do rovnice $-x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$ vyjadřující první řádek matice. Dostaneme $-x_1 + 2t - 5t = 0$, z čehož

$x_1 = -3t$. Vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě $\lambda_1 = 8$ je vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_{2,3} = 0$ dosadíme do systému $A_\varphi - \lambda \cdot E = 0$ a najdeme řešení:

$$\begin{pmatrix} 1-\color{red}{0} & 2 & -3 \\ 2 & 4-\color{red}{0} & -6 \\ -1 & -2 & 3-\color{red}{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \end{pmatrix}$$

Zpětný chod: jediný nenulový řádek je rovnicí $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$. Pokud zvolíme $x_2 = s, x_3 = t, s, t \in \mathbb{R}$ a dosadíme do uvedené rovnice, dostaneme $x_1 + 2s - 3t = 0$, z čehož $x_1 = -2s + 3t$. Vlastními vektory odpovídajícími vlastní hodnotě $\lambda_{2,3} = 0$ jsou vektory příslušející parametrům s, t:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 10.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Příklad 10.1.e (pouze s výsledkem)

Zadání

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí ve standardní bázi:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ x & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vlastními čísly φ jsou $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$.

1. Vypočítejte hodnotu prvku x.
2. Určete vlastní vektory lineární transformace φ odpovídající vlastním číslům $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$.

10.2 Motivační příklady na lineární zobrazení

Na závěr 10. cvičení i celé sbírky nabízíme dva řešené příklady, v nichž chceme ukázat, jak „hezky“ se dají použít znalosti a dovednosti získané v celém kurzu MA0005 Algebra 2.

Řešený příklad 10.2.a

Zadání[2]
Určete matici A_S zobrazení φ (ve standardní bázi), které překlopí vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ podle přímky $p : x - 2y = 0$.

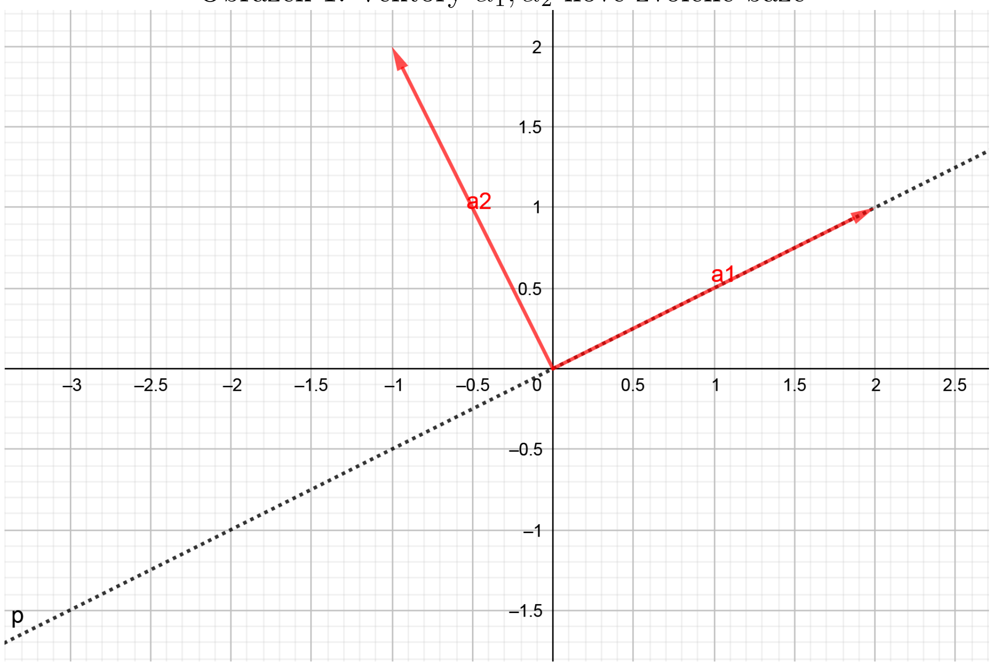
Nápověda: Zkuste najít jinou bázi α, vhodnější než standardní, pro níž bude snadné určit matici zobrazení A_α, které překlápí vektory podle zadané přímky. Pomocí matic přechodu a jejich kombinací s A_α potom snadno dostaneme matici A_S.

Řešení
1. Volba báze
Budeme se držet nápovědy a hledat vhodnější bázi α. Jsme v prostoru $\mathbb{R}^2$, báze by tedy měla obsahovat dva lineárně nezávislé vektory. Jako první volme vektor $\vec{\alpha_1}$ ležící na přímce p, například

$$\vec{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ten se překlopením zobrazí sám na sebe. Druhý vektor báze volíme tak, aby bylo snadné jej „překlopit" podle přímky $x - 2y = 0$ a zároveň nebyl lineárně závislý na $\vec{\alpha_1}$. Pokud například určíme $\vec{\alpha_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, který je kolmý k přímce p, jeho překlopením dostaneme vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ opačný k vektoru $\vec{\alpha_2}$. Názorně jsou vektory vidět na Obrázku 1.

Obrázek 1: Vektory $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ nově zvolené báze



[2] Viz video „Matice přechodu a zobrazení motivačně" na webové stránce `www.isibalo.com/matematika/linearni-algebra/matice-prechodu-a-zobrazeni-motivacne`.

2. Nalezení matice zobrazení v nově zvolené bázi
Matici zobrazení φ,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

v nově zvolené bázi α vytvoříme na základě obrazů bázových vektorů, které jsme si stanovili. Je však třeba nejdříve najít jejich souřadnice v bázi α.

Pro první vektor $\vec{\alpha_1}$ zadaný ve standardní bázi hledáme souřadnice x_1, x_2 takové, aby

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha$$

Druhý bázový vektor $\vec{\alpha_2}$ se zobrazí na vektor $-\vec{\alpha_2}$ k němu opačný. Oba je máme zadané ve standardní bázi, proto hledáme souřadnice v bázi α, tj. koeficienty $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_S &= y_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\alpha \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_S &= z_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_\alpha \end{aligned}$$

Nyní je možné přistoupit ke spočítání prvků matice A_α zobrazení φ pro vektory zadané v bázi α. Víme, že

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{\alpha_1}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(\vec{\alpha_2}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z uvedených systémů sestavíme rovnice, přičemž sdružíme k sobě ty odpovídající koeficientům a, b a ty, které nám umožní spočítat c, d:

$$\begin{array}{lrclrcl} \varphi(\vec{\alpha_1}): & a \cdot 1 + b \cdot 0 & = & 1, & c \cdot 1 + d \cdot 0 & = & 0 \\ \varphi(\vec{\alpha_2}): & a \cdot 0 + b \cdot 1 & = & 0, & c \cdot 0 + d \cdot 1 & = & -1 \end{array}$$

Po jednoduchých úpravách máme matici A_φ:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

3. Nalezení matic přechodu
Abychom pomocí matice A_α mohli určit matici zobrazení A_S podle standardní báze, je třeba nalézt matice přechodu mezi bázemi S a α. Nalezení matice přechodu $P_{\alpha \to S}$ je jednodušší. Vektory báze α jsou totiž zadány vzhledem ke standardní bázi, jejich souřadnice tedy pouze sloupcově vložíme do matice přechodu:

$$P_{\alpha \to S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Opačnou matici přechodu $A_{S\to\alpha}$ je možné vypočítat tak, že nalezneme inverzní matici k $P_{\alpha\to S}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \frac{1}{5}\cdot\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Je tedy

$$P_{S\to\alpha} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Nalezení matice zobrazení A_S
Abychom pomocí matice A_α a matic přechodu určili matici A_S ve standardní bázi, je třeba provést následující tři kroky:

1. Vektor $(\vec{u})_S$ ve standardní bázi převést do báze α, tj. určit $(\vec{u})_\alpha$.
2. Pomocí matice zobrazení A_α najít obraz vektoru $(\vec{u})_\alpha$, tj. určit $(\varphi(\vec{u}))_\alpha$.
3. Obraz vektoru $\vec{u}$ v bázi α převést zpátky do standardní báze S, tj. najít $(\varphi(\vec{u}))_S$.

K těmto akcím nám postupně poslouží matice $P_{S\to\alpha}, A_\alpha, P_{\alpha\to S}$. Jejich složením dostaneme kýženou matici A_S, což pro nás vlastně znamená je vynásobit ve správném pořadí:

$$\begin{aligned} A_S \cdot \vec{u} &= (P_{\alpha\to S}\cdot A_\alpha \cdot P_{S\to\alpha})\cdot\vec{u} \\ A_S &= P_{\alpha\to S}\cdot A_\alpha\cdot P_{S\to\alpha} \end{aligned}$$

Jednodušší bude začít součinem $P_{\alpha\to S}\cdot A_\alpha$:

$$P_{\alpha\to S}\cdot A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Následně můžeme tuto matici vynásobit maticí přechodu $P_{S\to\alpha}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Máme tedy hledanou matici A_S:

$$A_S = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešený příklad 10.2.b

Zadání

Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace φ prostoru $\mathbb{R}^2$ zadané maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi. Následně ověřte, že body $[x, y]$ jednotkové kružnice (tj. vektory (x, y)) se pomocí zobrazení φ zobrazí na body elipsy, jejíž délky poloos budou rovny vlastním číslům.

Řešení

1. Nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů

Standardním způsobem najdeme vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení φ.

$|A_S - \lambda \cdot E| = (5-\lambda)^2 - 9 = 25 - 10 \cdot \lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 8) = 0$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 8$.

Vlastní vektory: Najdeme řešení systému $A_S - \lambda \cdot E = 0$ dosazením $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 8$ místo λ.

1. $\lambda_1 = 2 :\ \vec{u}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\lambda_2 = 8 :\ \vec{u}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Protože je matice A_S symetrická, jsou oba vlastní vektory ortogonální (tj. na sebe kolmé). Víme také, že násobky vlastních vektorů se zobrazí na násobky sama sebe. Například

$$\varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Vektory jednotkové kružnice

Podívejme se teď na jednotkovou kružnici a vektory, které ji tvoří. Určitě známe vektory $\vec{e_1} = (1, 0)$ a $\vec{e_2} = (0, 1)$, případně vektory k nim opačné: $\vec{f_1} = (-1, 0)$, resp. $\vec{f_2} = (0, -1)$. Ty však nejsou násobky vlastních vektorů, takže se nezobrazí na své násobky. Pomocí matice A_S je zobrazíme takto:

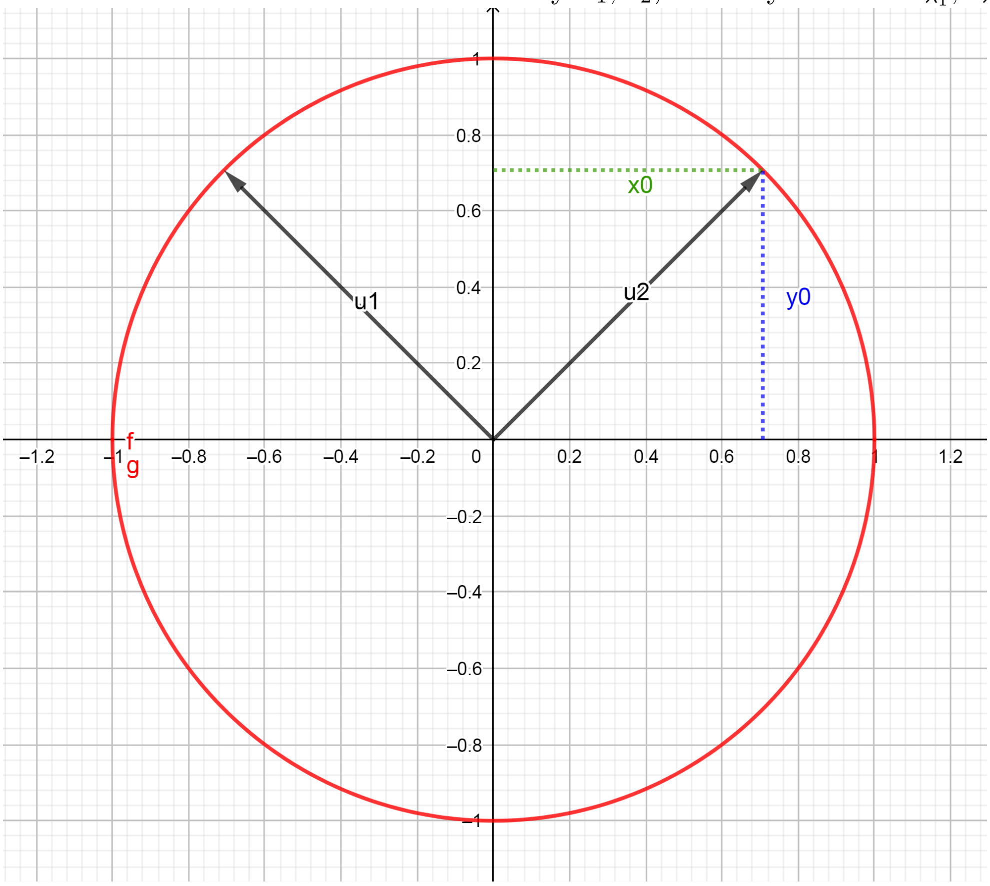
$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix},\ \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Nás zajímají také vektory, které jsou násobky vlastních vektorů. Podívejme se na vektor $\vec{u_2}$ ležící na přímce $y = x$, který je jistě násobkem vlastního vektoru $\vec{u}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (viz Obrázek 2). Jeho souřadnice (x_0, y_0) lze určit pomocí dvou faktů: velikost vektoru $\vec{u_2}$ je 1, úhel, který svírá s osou x, je $\alpha = 45°$. Platí tedy, že

$$\cos 45° = \frac{x_0}{1} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin 45° = \frac{y_0}{1} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Je zřejmé, že $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ a z toho $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Obrázek 2: Jednotková kružnice a vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}$, násobky vektorů $\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}$



3. Lineární zobrazení jednotkové kružnice
Zobrazíme-li oba vektory pomocí φ, přejdou na své vlastní násobky.

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u_1}) &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{u_1} = \lambda_1 \cdot \vec{u_1}; \\ \varphi(\vec{u_2}) &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} = 8 \cdot \vec{u_2} = \lambda_2 \cdot \vec{u_2}\end{aligned}$$

Podobně jsou na tom i další vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ určující jednotkovou kružnici, tj. vektory velikosti 1 vycházející z počátku pod úhlem α, který svírají s osou x. Zobrazí se na elipsu d, jejíž střed je v počátku. Hlavní poloosa a o velikosti 8 leží na přímce $y = x$ a je totožná s vektorem $\vec{u_2}$, vedlejší poloosa b velikosti 2 je na přímce $y = -x$ a totožná s vektorem $\vec{u_1}$.

Pro vykreslení elipsy d v Geogebře je třeba znát souřadnice obou ohnisek E, F. Obě leží na hlavní ose (přímka $y = x$) ve vzdálenosti

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60}$$

od středu elipsy.[3] Geogebra umožňuje zadání bodu i „goniometrickým“ způsobem, tj. pomocí vzdálenosti od počátku (velikost vektoru) a úhlu, který

[3] Parametr e se nazývá excentricita (výstřednost) elipsy.

úsečka spojující počátek a bod svírá s kladnou poloosou x (argument vektoru). Obojí už známe, a tak v Geogebře nejprve vypočítáme ohniska pomocí příkazů

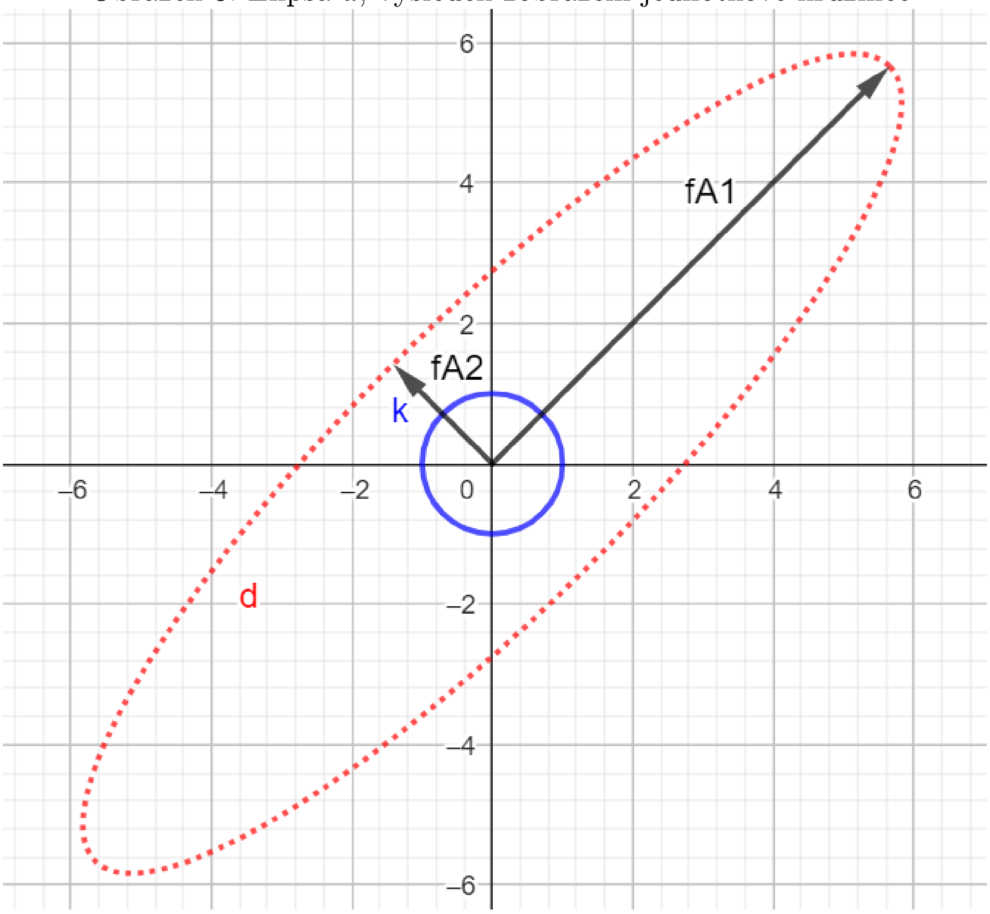
```
E = (e*cos(pi/4), e*sin(pi/4))
F = (-e*cos(pi/4), -e*sin(pi/4))
```

a následně vykreslíme elipsu pomocí příkazu

```
d = Elipsa(E, F, 8)
```

Vektor fA1 na Obrázku 3 je roven $\varphi(\vec{u_2})$, vektor fA2 je $\varphi(\vec{u_1})$.

Obrázek 3: Elipsa d, výsledek zobrazení jednotkové kružnice



Výsledky příkladů

10.1.d: $\lambda_1 = -2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

10.1.e: $x = -1$, $\lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 3 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.