MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 1

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

1.1 Výpočet determinantu pomocí definice

Příklady části 1.1 jsou tématicky zaměřeny na výpočet determinantu pomocí jeho definice. Určitě existují efektivnější metody, které si ukážeme v Cvičení 3. Abyste dokázali spočítat determinant pomocí definice, je třeba znát pojmy permutace a inverze v permutaci. Na řešeném příkladu 1.1.a si jejich význam prakticky demonstrujeme, přesnější definice uvádím na tomto místě.

Je-li $n \in \mathbb{N}$, permutací n-prvkové množiny M rozumíme libovolné její uspořádání (tj. uspořádanou n-tici), v němž se žádný prvek neopakuje. V této sbírce budeme pracovat s permutacemi nějaké množiny $N \subseteq \mathbb{N}$, které budeme značit takto:

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

Fakticky tento zápis znamená, že
$p(1) = p_1$ (na 1. místě je prvek $p_1 \in N$),
$p(2) = p_2$ (na 2. místě je prvek $p_2 \in N$),
$\ldots$
$p(n) = p_n$ (na posledním místě je prvek $p_n \in N$).

Inverze v permutaci p n-prvkové množiny $N \subseteq \mathbb{N}$ je dvojice prvků $a, b \in N$ taková, že $a < b$ a zároveň $p(a) > p(b)$.

Řešený příklad 1.1.a

Zadání
Užitím definice determinantu spočtěte

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & -7 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Řešení
Z Definice 2 (viz *Skripta*, str. 8–9) je patrné, že hledáme součiny $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot a_{4j_4}$ takové, že

(*) z každého řádku a každého sloupce je vybrán právě jeden činitel.

Pro matici typu 4×4 je takových součinů $4! = 24$. Nás však budou zajímat jen ty součiny, které jsou nenulové. Abychom je našli, musíme začít ve 2. sloupci výběrem prvku $a_{12} = -3$. Podíváme-li se pak do 4. sloupce, nemáme jinou možnost než do takového součinu vybrat prvek $a_{34} = -7$:

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-3} & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & \mathbf{-7} \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Hledané součiny tedy mají tvar

$$a_{12} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{34} \cdot a_{4j_4} = (-3) \cdot a_{2j_2} \cdot (-7) \cdot a_{4j_4}.$$

Ve 2. a 4. řádku můžeme vybírat prvky pouze na 1. a 3. pozici, tj. volíme $j_2 \in \{1, 3\}$ a $j_4 \in \{1, 3\}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-3} & 4 & -5 \\ \mathbf{3} & 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 4 & 0 & 6 & \mathbf{-7} \\ \mathbf{5} & 0 & \mathbf{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Díky podmínce (*) dostáváme pouze dvě sloupcové permutace, tj. pouze 2 nenulové součiny z celkem $4! = 24$ možných:

$$\begin{aligned} p_1 = (2, 1, 4, 3) : &\qquad a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} = (-3) \cdot 3 \cdot (-7) \cdot 7 = 21 \cdot 21 = 441 \\ p_2 = (2, 3, 4, 1) : &\qquad a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41} = (-3) \cdot 5 \cdot (-7) \cdot 5 = 21 \cdot 25 = 525 \end{aligned}$$

Znaménka obou součinů určíme jako $(-1)^{\pi(p_1)}$, resp. $(-1)^{\pi(p_2)}$, kde symbolem π rozumíme počet inverzí zadaných permutací.

1. Permutace $p_1 = (2, 1, 4, 3)$ má tyto dvě inverze: $(\mathbf{2}, \mathbf{1}, 4, 3)$ a $(2, 1, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, platí tedy $\pi(p_1) = 2$.

2. Permutace $p_2 = (2, 3, 4, 1)$ má tyto tři inverze: $(\mathbf{2}, 3, 4, \mathbf{1})$, $(2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{1})$ a $(2, 3, \mathbf{4}, \mathbf{1})$, platí tedy $\pi(p_2) = 3$.

Dle Definice 2 (viz *Skripta*, str. 10) je tedy

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & -7 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{\pi(p_1)} \cdot (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43}) + (-1)^{\pi(p_2)} \cdot (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}) \\ &= (-1)^2 \cdot 441 + (-1)^3 \cdot 525 = 441 - 525 = -84 \end{aligned}$$

Řešený příklad 1.1.b

Zadání

Užitím definice determinantu spočtěte

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Řešení

Začneme 3. řádkem matice, v němž jsou pouze dvě nenulové hodnoty: $a_{31} = -3$ a $a_{33} = 5$. Díky tomuto výběru už můžeme vyřadit polovinu všech možných součinů, protože budou nulové.

1. Hledáme-li permutace pro prvek a_{31} tak, aby byl součin nenulový a zároveň splněna podmínka (*), pak ve 3. sloupci zbývá už jen jedna

nenulová hodnota, tj. prvek $a_{23} = 4$. Z 1. a 4. řádku tedy můžeme vybírat už jen prvky $a_{12}, a_{14}, a_{42}, a_{44}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-2} & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & -1 & \mathbf{4} & -1 \\ \mathbf{-3} & 0 & 5 & 0 \\ 5 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

Dvěma možným výběrům odpovídají tyto sloupcové permutace:

$$p_1 = (2, 3, 1, 4): \qquad a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44} = (-2) \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = -96$$
$$p_2 = (4, 3, 1, 2): \qquad a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} = 3 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 1 = -36$$

2. Zvolme nyní druhou možnost pro 3. řádek, a to prvek $a_{33} = 5$. Je tedy „obsazen“ 3. sloupec. V 1. sloupci už máme pouze dvě nenulové varianty, prvky $a_{11} = 1, a_{41} = 5$.

   (a) Do součinu nejprve vezmeme a_{33}, a_{11} a na 2. a 4. řádku už zbývají pouze prvky $a_{22}, a_{24}, a_{42}, a_{44}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 & \mathbf{-1} \\ -3 & 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 5 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

   Dvěma možným výběrům odpovídají tyto sloupcové permutace:

$$p_3 = (1, 2, 3, 4): \qquad a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} = 1 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-4) = 20$$
$$p_4 = (1, 4, 3, 2): \qquad a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42} = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot (-1) = -5$$

   (b) Zbývající možností je a_{33}, a_{41}, díky čemuž nám na 1. a 2. řádku zbývají pouze prvky $a_{12}, a_{14}, a_{22}, a_{24}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-2} & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 & \mathbf{-1} \\ -3 & 0 & \mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   Dvěma možným výběrům odpovídají tyto sloupcové permutace:

$$p_5 = (2, 4, 3, 1): \qquad a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41} = (-2) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 5 = 50$$
$$p_6 = (4, 2, 3, 1): \qquad a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} = 3 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 5 = -75$$

Našli jsme tedy celkem 6 nenulových součinů (z 24 možných) odpovídajících permutacím $p_1, \ldots, p_6$. Spočítejme si pro ně nyní počet inverzí:

$\pi(p_1) = \pi(2, 3, 1, 4) = 2$, $\pi(p_2) = \pi(4, 3, 1, 2) = 5$, $\pi(p_3) = \pi(1, 2, 3, 4) = 0$,
$\pi(p_4) = \pi(1, 4, 3, 2) = 3$, $\pi(p_5) = \pi(2, 4, 3, 1) = 4$, $\pi(p_6) = \pi(4, 2, 3, 1) = 5$.

Poskládáme-li dohromady již spočítané součiny a dle počtu inverzí vložíme správné znaménko, vychází determinant takto:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$= (-1)^2 \cdot (-96) + (-1)^5 \cdot (-36) + (-1)^0 \cdot 20 + (-1)^3 \cdot (-5) + (-1)^4 \cdot 50 + (-1)^5 \cdot (-75) = -96 + 36 + 20 + 5 + 50 + 75 = 90$

Příklad 1.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Užitím definice determinantu spočtěte

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 1.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Užitím definice determinantu spočtěte

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

1.2 Křížové pravidlo pro výpočet determinantu

Příklady 1.2 a 1.3 jsou tématicky zaměřeny na výpočet determinantu z matic typu 2×2 (Křížové pravidlo) a 3×3 (Sarusovo pravidlo). U obou metod se používá pojmů hlavní a vedlejší diagonála matice. Na hlavní diagonále matice A leží prvky, jejichž index řádku i sloupce je stejný, tj. prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots$ (viz červeně označené prvky matice A typu 4×4 níže). Vedlejší diagonála obsahuje prvky ležící „naproti“ hlavní diagonále počínaje a_{1n} na prvním řádku a posledním sloupci (viz modře označené prvky matice A typu 4×4 níže).

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \mathbf{a_{14}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ \mathbf{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} \end{pmatrix}$$

Řešený příklad 1.2.a

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Použijeme Křížové pravidlo, tj. determinant z matice řádu 2×2 spočítáme jako rozdíl součinu prvků na hlavní diagonále „mínus“ součin prvků na vedlejší diagonále:

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \cdot (\mathbf{-1}) - (\mathbf{-2}) \cdot \mathbf{4} = -1 - (-8) = 7$$

Řešený příklad 1.2.b

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = (\mathbf{-3}) \cdot \mathbf{4} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} = -12 - 2 = -14$$

Příklad 1.2.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Sarusovo pravidlo pro výpočet determinantu

Řešený příklad 1.3.a

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení
Dle definice determinantu hledáme všechny součiny takové, že

(*) z každého řádku a každého sloupce je vybrán právě jeden činitel.

V případě matice řádu 3×3 jde tedy o počet sloupcových permutací tříprvkové množiny $\{1, 2, 3\}$, tedy $3! = 6$, přičemž tři součiny budou přičteny s „kladným“ znaménkem, součet zbývajících tří se odečítá. Při výpočtu můžeme použít trik, pomocí něhož rychle najdeme ty „kladné“ a „záporné“ součiny. Napravo od determinantu matice si totiž znovu zapíšeme první dva sloupce matice:

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right.$$

S „kladným“ znaménkem bude součin prvků na diagonálách, které mají příbuzný sklon s hlavní diagonálou (označeno červeně):

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} \mathbf{3} & -2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & \mathbf{3} & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & \mathbf{6} & -2 & -4 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & \mathbf{-2} & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & \mathbf{2} & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & \mathbf{-2} & -4 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & -2 & \mathbf{4} & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & \mathbf{1} & 1 \\ -2 & -4 & 6 & -2 & \mathbf{-4} \end{array}\right.$$

Se „záporným“ znaménkem bude součin prvků na diagonálách, které mají příbuzný sklon s vedlejší diagonálou (označeno modře):

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & -2 & \mathbf{4} & 3 & -2 \\ 1 & \mathbf{3} & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & -4 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & -2 & 4 & \mathbf{3} & -2 \\ 1 & 3 & \mathbf{2} & 1 & 1 \\ -2 & \mathbf{-4} & 6 & -2 & -4 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & -2 & 4 & 3 & \mathbf{-2} \\ 1 & 3 & 2 & \mathbf{1} & 1 \\ -2 & -4 & \mathbf{6} & -2 & -4 \end{array}\right.$$

Platí tedy:

$$\begin{aligned} |A| &= +[3 \cdot 3 \cdot 6 + (-2) \cdot 2 \cdot (-2)) + 4 \cdot 1 \cdot (-4)] \\ &\quad -[(-2) \cdot 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot (-2)] \\ &= +(54 + 8 - 16) - (-24 - 24 - 12) \\ &= 46 + 60 = 106 \end{aligned}$$

Řešený příklad 1.3.b

Zadání

Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení

Při výpočtu determinantu a hledání trojic pro součiny si opět pomůžeme tím, že vedle matice zapíšeme ještě jednou první dva sloupce:

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right.$$

S „kladným“ znaménkem bude součin prvků na diagonálách, které mají příbuzný sklon s hlavní diagonálou (označeno červeně):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & 1 & -3 \\ 3 & \mathbf{2} & -1 \\ -4 & 3 & \mathbf{-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & \mathbf{1} & -3 \\ 3 & 2 & \mathbf{-1} \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ \mathbf{-4} & 3 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & \mathbf{-3} \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ \mathbf{3} & 2 \\ -4 & \mathbf{3} \end{matrix}$$

Se „záporným“ znaménkem bude součin prvků na diagonálách, které mají příbuzný sklon s vedlejší diagonálou (označeno modře):

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & \mathbf{-3} \\ 3 & \mathbf{2} & -1 \\ \mathbf{-4} & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & \mathbf{-1} \\ -4 & \mathbf{3} & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{-2} & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & \mathbf{-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & 2 \\ -4 & 3 \end{matrix}$$

Platí tedy:

$$\begin{aligned} |A| &= +[(-2)\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot(-4)) + (-3)\cdot 3\cdot 3] \\ &\quad -[(-4)\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot(-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot 1] \\ &= +(4+4-27)-(24+6-3) \\ &= -19-27=-46 \end{aligned}$$

Poznámka: Při řešení na papíře není samozřejmě nutné si determinant i s dvěma rozšiřujícími sloupci psát šestkrát (jak jsme provedli v řešení příkladů 1.3.a, 1.3.b). Stačí to pouze jednou, přičemž pomocí šikmých čar a dvou různých barev pak můžete diagonály vyznačit v jednom „rozšířeném“ determinantu zadané matice. Další častou možností je zapsat pod determinant matice znovu první a druhý řádek a diagonály příbuzné s hlavní a vedlejší značit shora dolů.

Příklad 1.3.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.3.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Cramerovo pravidlo

V této části se poprvé (a ne naposledy) setkáváme s pojmy matice systému (matice koeficientů), resp. rozšířená matice systému. Souvisí to s tím, že systémy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

budeme zapisovat maticově, pouze pomocí jejích koeficientů a pravých stran:

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Takovou matici označujeme jako **rozšířenou matici systému**.

Vezmeme-li pouze ony koeficienty a dáme je do matice, hovoříme o **matici systému**, neboli matici koeficientů:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Řešený příklad 1.4.a

Zadání

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 15 \\ 7x & - & y & + & z & = & 9 \\ x & + & 2y & + & z & = & 9 \end{array}$$

Řešení

Spočítejme nejdříve determinant matice systému

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

pomocí Sarusova pravidla[1]:

$$\begin{aligned} |A| &= +[2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 7 \cdot 2] \\ &\quad -[1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \cdot 3] \\ &= -2 + 3 + 14 - [(-1) + 4 + 21] = 15 - 24 = -9 \end{aligned}$$

Jelikož je determinant matice systému nenulový, můžeme Cramerovo pravidlo použít v jeho základní podobě a dostat tak jedno jediné řešení systému.

[1] Necháme už na čtenářích, aby si pomohli trikem, který jsme ukázali v části 1.3.

Z matice systému si postupně sestavíme tři matice A_x, A_y, A_z, v nichž sloupec koeficientů příslušející dané proměnné nahradíme sloupcem pravých stran rovnic:

$$A_x = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 15 \\ 7 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Z těchto tří matic spočítáme determinanty:

$$\begin{aligned} |A_x| &= +[15 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 9 + 1 \cdot 9 \cdot 2] \\ &\quad -[9 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 15 + 1 \cdot 9 \cdot 3] \\ &= -15 + 27 + 18 - [-9 + 30 + 27] = 30 - 48 = -18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_y| &= +[2 \cdot 9 \cdot 1 + 15 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 7 \cdot 9] \\ &\quad -[1 \cdot 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \cdot 15] \\ &= 18 + 15 + 63 - [9 + 18 + 105] = 96 - 132 = -36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_z| &= +[2 \cdot (-1) \cdot 9 + 3 \cdot 9 \cdot 1 + 15 \cdot 7 \cdot 2] \\ &\quad -[1 \cdot (-1) \cdot 15 + 2 \cdot 9 \cdot 2 + 9 \cdot 7 \cdot 3] \\ &= -18 + 27 + 210 - [-15 + 36 + 189] = 219 - 210 = 9 \end{aligned}$$

Řešení systému již najdeme díky Cramerovu pravidlu (viz Věta 1, *Skripta*, str. 12):

$$\begin{aligned} x = \frac{|A_x|}{|A|} &= \frac{-18}{-9} = 2, \\ y = \frac{|A_y|}{|A|} &= \frac{-36}{-9} = 4, \\ z = \frac{|A_z|}{|A|} &= \frac{9}{-9} = -1, \end{aligned}$$

tedy

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Řešený příklad 1.4.b

Zadání

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & -1 \\ -2x & + & 3y & - & z & = & 3 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Řešení

Spočítejme nejdříve determinant matice systému

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

pomocí Sarusova pravidla:

$$\begin{aligned}|A| &= +[1\cdot 3\cdot 2+(-2)\cdot(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-2)\cdot 1]\\ &\quad -[(-1)\cdot 3\cdot 3+1\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)\cdot(-2)]\\ &= 6-2-6-[-9-1+8]=-2-(-2)=0\end{aligned}$$

Jelikož je determinant matice systému nulový, nemůžeme Cramerovo pravidlo použít v jeho základní podobě (systém nemá jedno řešení). Fakt $|A|=0$ také znamená, že řádky či sloupce matice systému jsou lineárně závislé. Pozorováním všech tří rovnic systému určitě přijdete na to, že $r_1+r_2=r_3$ (r_1, r_2, r_3 označují rovnice systému), což znamená závislost 3. rovnice na prvních dvou, a tedy nekonečný počet řešení systému.[2]

V takovém případě můžeme Cramerovo pravidlo použít také (viz bakalářská práce Andrey Danešové, str. 64–65). Vybereme libovolnou submatici řádu 2, jejíž determinant není roven 0, např. submatici A_{11} k prvku a_{11}:

$$A_{11}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Oba řádky rovnic příslušných submatici A_{11} upravíme tak, že na pravou stranu přesuneme členy s 3. proměnnou:

$$\begin{array}{rcrcrcr}3y & - & z & = & 3 & + & 2x\\ y & + & 2z & = & 2 & + & x\end{array}$$

Na vzniklý systém použijeme Cramerovo pravidlo, přičemž proměnná x je parametr, na němž nekonečně mnoho řešení závisí.

$$|A_{11}|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-[1\cdot(-1)]=7$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}3+2x & -1\\ 2+x & 2\end{vmatrix}=2\cdot(3+2x)-(-1)\cdot(2+x)=6+4x+2+x=8+5x$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix}3 & 3+2x\\ 1 & 2+x\end{vmatrix}=3\cdot(2+x)-1\cdot(3+2x)=6+3x-3-2x=3+x$$

Z toho už získáme vyjádření proměnných y, z:

$$\begin{aligned}y=\frac{|A_y|}{|A|} &= \frac{8+5x}{7}=\frac{8}{7}+\frac{5}{7}x,\\ z=\frac{|A_z|}{|A|} &= \frac{3+x}{7}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}x,\end{aligned}$$

tedy

$$K=\left\{\begin{pmatrix}x\\ \frac{8}{7}+\frac{5}{7}x\\ \frac{3}{7}+\frac{1}{7}x\end{pmatrix},\ \text{kde } x\in\mathbb{R}\right\}.$$

[2] Může nastat i třetí situace, a to když sice objevíme závislost řádků v matici systému, avšak stejná závislost už nebude fungovat pro rozšířenou matici systému; v takovém případě systém nemá řešení. Podrobně si to vysvětlíme ve Cvičení 4, když se budeme zabývat Gaussovou eliminační metodou a Frobeniovou větou.

Příklad 1.4.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & 2 \\ x & & & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Příklad 1.4.d (pouze s výsledkem)

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & 5z & = & 1 \end{array}$$

Výsledky příkladů

1.1.c: 0, 1.1.d: -72
1.2.c: 0, 1.2.d: -3
1.3.c: 19, 1.3.d: 0

1.4.c: $K = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{17}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} \right\}$

1.4.d: Nekonečně mnoho řešení, dle submatice A_{11} je $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{11}{3} - \frac{14}{3}x \\ \frac{5}{3} - \frac{5}{3}x \end{pmatrix},\ \text{kde } x \in \mathbb{R} \right\}$.