MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 2

Ve skriptech jsou výpočtu determinantu věnovány přednášky 1, 2. Ve Větě 2 začínající na str. 12 je uvedeno šest vlastností $D_1, \ldots, D_6$ determinantu čtvercové matice, které si v této části sbírky podrobně procvičíme.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

2.1 Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceův rozvoj je podrobně popsán ve vysvětlení vlastnosti **D5** (viz Přednáška 2, str. 17). V této sbírce si jej detailně vysvětlíme v Řešeném příkladu 2.1.a, kde narozdíl od skript budeme používat pojmy submatice a minor (tj. determinant k submatici). Řešený příklad 2.1.b již nerozvedeme do takových podrobností. Upozorňujeme, že je výhodné si k Laplaceovu rozvoji vybrat takový řádek či sloupec obsahující co nejvíce nul, protože poté nám ubyde práce a výpočet nebude tak náchylný k chybám.

Řešený příklad 2.1.a

Zadání

Užitím Laplaceova rozvoje podle Vámi vybraného řádku či sloupce vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & -1 & -5 \\ 5 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

Matice A neobsahuje prvky s nulovou hodnotou, proto příliš nezáleží na tom, jaký řádek či sloupec si k rozvoji vybereme. Zkusme tedy pracovat s 1. řádkem. Pro každý jeho prvek a_{1j}, kde $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, konstruujeme součin skládající se ze tří činitelů:

- znaménka, které určíme vyčíslením výrazu $(-1)^{1+j}$,
- samotného prvku a_{1j} a
- determinantu ze submatice (též minoru) A_{1j} příslušnému k prvku a_{1j}.

Tento součin si postupně pro všechny čtyři prvky 1. řádku sestrojíme. Jelikož submatice budou typu 3×3, jejich determinant lze spočítat Sarusovým pravidlem, jehož použití už nebudeme podrobně rozvádět tak, jak jsme činili v 1. části této sbírky.

1. Pro prvek $a_{11} = -1$ obsahuje submatice A_{11} ty prvky (vyznačeny modře), které neleží na 1. řádku a 1. sloupci:

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{\mathbf{-1}} & 2 & 4 & -2 \\ 3 & \color{blue}{\mathbf{1}} & \color{blue}{\mathbf{-3}} & \color{blue}{\mathbf{5}} \\ -3 & \color{blue}{\mathbf{4}} & \color{blue}{\mathbf{-1}} & \color{blue}{\mathbf{-5}} \\ 5 & \color{blue}{\mathbf{-2}} & \color{blue}{\mathbf{-4}} & \color{blue}{\mathbf{1}} \end{pmatrix}$$

   Součin k prvku $a_{11} = -1$ je tedy roven tomuto výrazu:

$$(-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\{\color{red}{+[-1 - 30 - 80]}\color{blue}{-[10 + 20 - 12]}\} = 129$$

2. Pro prvek $a_{12} = 2$ obsahuje submatice A_{12} ty prvky (vyznačeny modře), které neleží na 1. řádku a 2. sloupci:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{2} & 4 & -2 \\ \mathbf{3} & 1 & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-3} & 4 & \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & -2 & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Součin k prvku $a_{12} = 2$ je tedy roven tomuto výrazu:

$$(-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & -5 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & -5 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot \{+[-3 + 75 + 60] - [-25 + 60 + 9]\} = -176$$

3. Pro prvek $a_{13} = 4$ obsahuje submatice A_{13} ty prvky (vyznačeny modře), které neleží na 1. řádku a 3. sloupci:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \mathbf{4} & -2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & -3 & \mathbf{5} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} & -1 & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & -4 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Součin k prvku $a_{13} = 4$ je tedy roven tomuto výrazu:

$$(-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \{+[12 - 25 + 30] - [100 + 30 - 3]\} = -440$$

4. Pro prvek $a_{14} = -2$ obsahuje submatice A_{14} ty prvky (vyznačeny modře), které neleží na 1. řádku a 4. sloupci:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & 5 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & -5 \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & 1 \end{pmatrix}$$

Součin k prvku $a_{14} = -2$ je tedy roven tomuto výrazu:

$$(-1)^{1+4} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \{+[-48 - 5 - 18] - [-60 + 6 + 12]\} = -58$$

Když Laplaceův rozvoj podle 1. řádku sestavíme dohromady, dostáváme:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & -1 & -5 \\ 5 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & -5 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + \\
& \quad (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 129 - 176 - 440 - 58 = -545
\end{aligned}$$

Řešený příklad 2.1.b

Zadání

Užitím Laplaceova rozvoje podle Vámi vybraného řádku či sloupce vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

Při výběru řádku či sloupce pro Laplaceův rozvoje je výhodné zvolit 3. sloupec obsahující hned dvě nuly. Díky tomu budeme, místo čtyř, počítat pouze dva determinanty matice řádu 3×3. Nejprve si provedeme rozvoj a pak si spočítáme dílčí minory, abychom na závěr vypočetli výsledek. Pro rozvoj dle 3. sloupce platí:

$$\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{1+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \\
& \quad (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Druhý a čtvrtý součin bude nulový, zaměřme se tedy pouze na první a třetí, u nichž si nejprve spočítejme minory:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = +[-4 + 0 + 30] - [60 + 0 - 3] = 26 - 57 = -31$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = +[0 + 30 - 12] - [-18 + 0 - 2] = 18 + 20 = 38$$

Nyní výsledky obou determinantů dosadíme do rozvoje a získáme výsledek:

$$\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{1+3} \cdot (-4) \cdot (-31) + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot 38 + 0 \\
&= (-4) \cdot (-31) + (-1) \cdot 38 = 86
\end{aligned}$$

Příklad 2.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Užitím Laplaceova rozvoje podle Vámi vybraného řádku či sloupce vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & -4 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -9 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Užitím Laplaceova rozvoje podle Vámi vybraného řádku či sloupce vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2.2 Další vlastnosti determinantu matice

Shrňme si nyní zbývající vlastnosti uvedené ve skriptech (Přednášky 1, 2), jejichž využitím si ještě více můžeme zjednodušit Laplaceův rozvoj:

D1: $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M (viz *Skripta*, str. 12);

D2: Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$ (viz *Skripta*, str. 13);

D3: Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$ (viz *Skripta*, str. 13–14)[1];

D4: Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku, kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ (viz *Skripta*, str. 16);

D6: Pokud některý řádek, např. l-tý ($l \in \mathbb{N}$), je lineární kombinací jiných řádků, např. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), [2] tak je determinant matice nulový (viz *Skripta*, str. 19).

[1] Jde spíše o důsledek vlastnosti **D3**, tzv. *linearity při výpočtu determinantu*, který je uveden ve *Skriptech* na str. 14

[2] tj. existují reálné koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_k$ takové, že $\vec{a_l} = c_1 \cdot \vec{a_1} + c_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + c_k \cdot \vec{a_k}$ (viz také *Skripta*, Definice 7 na str. 13)

Řešený příklad 2.2.a

Zadání
Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 8 \\ -3 & -12 & 0 & 15 \\ 9 & 3 & -7 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Řešení
Použijeme nejdříve vlastnost **D3** u 2. řádku, v němž jsou všechny prvky násobky 3. Poté si zvolíme „pivota“ $a_{11} = 1$, pod kterým budeme nulovat využitím vlastnosti **D4**.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -4 & -1 & 8 \\ -3 & -12 & 0 & 15 \\ 9 & 3 & -7 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{matrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -4 & -1 & 8 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ 9 & 3 & -7 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ -9r_1 \\ +3r_1 \end{matrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -4 & -1 & 8 \\ 0 & -8 & -1 & 13 \\ 0 & 39 & 2 & -69 \\ 0 & -14 & -3 & 20 \end{vmatrix}$$

Je patrné, že rozvoj podle 1. sloupce zajistí výpočet pouze jednoho determinantu z matice typu 3×3, platí tedy:

$$|A| = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -1 & 13 \\ 39 & 2 & -69 \\ -14 & -3 & 20 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -1 & 13 \\ 39 & 2 & -69 \\ -14 & -3 & 20 \end{vmatrix}$$

V determinantu, který je třeba spočítat, se vyskytují poměrně velká čísla, zkusme jej ještě upravit, například vynulovat (dle vlastnosti **D4**) sloupec pod prvkem -1 na 1. řádku a 2. sloupci:

$$\begin{vmatrix} -8 & -1 & 13 \\ 39 & 2 & -69 \\ -14 & -3 & 20 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -8 & -1 & 13 \\ 23 & 0 & -43 \\ 10 & 0 & -19 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 23 & -43 \\ 10 & -19 \end{vmatrix}$$

Determinant matice typu 2×2 napravo už spočítáme pomocí Křížového pravidla a kalkulačky: $23 \cdot (-19) - 10 \cdot (-43) = -437 + 430 = -7$.

Celkově je tedy

$$|A| = 3 \cdot (-7) = -21.$$

Řešený příklad 2.2.b

Zadání
Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Řešení
Laplaceův rozvoj se samozřejmě dá použít i pro determinanty ze čtvercových

matic vyšších řádků. Uplatněme vlastnost **D2** a prohoďme 1. a 2. řádek, abychom na 1. řádku a 5. sloupci dostali prvek s hodnotou 1. Následně použijeme vlastnosti **D4** a pod pivotem vynulujeme 5. sloupec.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ +2r_1 \\ +r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 11 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 11 & -7 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & 1 \\ -5 & 11 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 11 & -7 & -3 & 4 \end{vmatrix} =_{(\star)}$$

Pokračujeme nyní v Laplaceově rozvoji determinantu z matice typu 4×4. Opět je výhodné použít vlastnost **D4** na řádku, jehož pivotem je prvek o hodnotě ± 1, tedy např. prvek na 1. řádku a 4. sloupci:

$$_{(\star)} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & \mathbf{1} \\ -5 & 11 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 11 & -7 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ -2r_1 \\ -4r_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & \mathbf{1} \\ -7 & 15 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 19 & -23 & -7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 15 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 19 & -23 & -7 \end{vmatrix} =_{(\diamond)}$$

A ještě jednou můžeme uplatnit vlasnost **D4**, když si zvolíme pivota -1 na 2. řádku a 3. sloupci a budeme nulovat zbylé hodnoty 3. sloupce:

$$_{(\diamond)} = \begin{vmatrix} -7 & 15 & 3 \\ 2 & -3 & \mathbf{-1} \\ 19 & -23 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} +3r_2 \\ \\ -7r_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & \mathbf{-1} \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -28$$

Příklad 2.2.c (pouze s výsledkem)

Zadání

Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -7 & -5 \\ 6 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání

Vypočtěte determinant z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2.3 Výpočet determinantu úpravou na schodový tvar

Připomeňme si nejdříve, že matice A libovolného typu je ve schodovém tvaru, jestliže v každém jejím řádku je zleva více nul než v tom předchozím, nebo se jedná řádek samých nul (viz také *Skripta*, Definice 8, str. 16).

Vlastnosti **D1**, **D2**, **D3** a **D4** tedy můžeme použít při výpočtu determinantu také tak, že postupně „nulujeme" prvky pod hlavní diagonálou, tj. převádíme matici na schodový tvar. Když se nám to podaří, tak determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Řešený příklad 2.3.a

Zadání

Vypočítejte determinant z matice A úpravou na schodový tvar, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -7 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Řešení

Začneme tak, že prohodíme první dva řádky (vlastnost **D2**), abychom na pozici pivota dostali prvek -1. Následně pomocí vlastnosti **D4** vynulujeme prvky v 1. sloupci pod pivotem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -7 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \color{red}{\mathbf{-1}} & -4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -7 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ +6r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \color{red}{\mathbf{-1}} & -4 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & -1 & 13 \\ 0 & -23 & -7 & 29 \\ 0 & 10 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

Na pozici $[2,2]$ potřebujeme mít pivota, pod nímž budeme „nulovat" 2. sloupec. Abychom z -8 dostali přijatelnější hodnotu, můžeme 2. řádek nejprve vynásobit -3 (vlastnost **D3**) a poté k němu přičíst 3. řádek (vlastnost **D4**), čímž na pozici pivota dostaneme prvek 1. Dalšími kroky už poté „nulujeme" 2. sloupec:

$$-\begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -1 & 13 \\ 0 & -23 & -7 & 29 \\ 0 & 10 & 0 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = -(-\tfrac{1}{3})\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & -4 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{24} & 3 & -39 \\ 0 & -23 & -7 & 29 \\ 0 & 10 & 0 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +r_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -10 \\ 0 & -23 & -7 & 29 \\ 0 & 10 & 0 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2r_4 \\ \\ \end{matrix} = \tfrac{1}{3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -7 & -9 \\ 0 & 10 & 0 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3r_2 \\ -10r_2 \end{matrix} =$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -19 & -39 \\ 0 & 0 & 40 & 81 \end{vmatrix}$$

Na pozici $[3,3]$ potřebujeme mít pivota, pod nímž budeme „nulovat“ 3. sloupec. Abychom znovu z -19 dostali přijatelnější hodnotu, můžeme 2. řádek nejprve vynásobit 2 (vlastnost **D3**) a poté k němu přičíst 4. řádek (vlastnost **D4**), čímž na pozici pivota dostaneme prvek 2. Dalšími kroky už poté „nulujeme“ 3. sloupec:

$$\tfrac{1}{3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{-19} & -39 \\ 0 & 0 & 40 & 81 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} = \tfrac{1}{6}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{-38} & -78 \\ 0 & 0 & 40 & 81 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +r_4 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \tfrac{1}{6}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & 40 & 81 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -20r_3 \end{matrix} = \tfrac{1}{6}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{6}\cdot[(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 21] = -7$$

Řešený příklad 2.3.b

Zadání

Vypočítejte determinant z matice A úpravou na schodový tvar, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

Na pozici $[1,1]$ prvního pivota se nachází prvek 1, takže nic nebrání tomu, abychom začali s „nulováním“ 1. sloupce:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \\ +3r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :5 \\ \\ \end{matrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{-3} & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & -2 \end{vmatrix}$$

Na pozici $[2,2]$ potřebujeme mít pivota, pod nímž budeme „nulovat“ 2. sloupec. Abychom z -3 dostali přijatelnější hodnotu, můžeme k 2. řádku přičíst 3. řádek (vlastnost **D4**), čímž na pozici pivota dostaneme prvek -1. Dalšími kroky už poté „nulujeme“ 2. sloupec:

$$5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{-3} & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +2r_2 \\ +14r_2 \end{matrix}$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-7} & 2 \\ 0 & 0 & -45 & 12 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot 7 - 45r_3 \end{matrix} = 5\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-7} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{5}{7}\cdot[1\cdot(-1)\cdot(-7)\cdot(-6)] = -30$$

Všimněte si, že při „nulování“ 3. sloupce jsme číslem 7 násobili čtvrtý řádek, od něhož jsme pak odečítali 45-násobek třetího řádku. Aplikovali jsme tak současně vlastnost **D3** i **D4** a zvyšovali jsme 7-krát hodnotu determinantu. Proto jsme v dalším kroku museli determinant násobit číslem $\frac{1}{7}$.

Příklad 2.3.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Vypočítejte determinant z matice A úpravou na schodový tvar, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.3.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Vypočítejte determinant z matice A úpravou na schodový tvar, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2.4 Linearita při výpočtu determinantů

V předchozích kapitolách 2.1, 2.2 a 2.3 jsme si uváděli vlastnosti **D1**, ..., **D6** determinantu čtvercové matice. V této části si ukážeme, jak lze ještě použít pravidlo linearity, tj. vlastnost **D3** spočívající v tom, že determinant je lineární v každé složce (podrobněji viz *Skripta*, str. 13). Ukažme si to na dvou řešených příkladech.

Řešený příklad 2.4.a

Zadání

Proveďte Laplaceův rozvoj matice M podle 5. sloupce a využijte linearity determinantu, abyste redukovali počet determinantů 4. řádu.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení

Nejdříve provedeme Laplaceův rozvoj podle 5. sloupce:

$$\begin{aligned} |M| &= (-1)^{1+5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+5} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+5} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_\star \end{aligned}$$

V předchozím rozvoji, v prvních dvou determinantech, vyznačíme červeně řádky, které jsou pro oba stejné (tj. 2., 3. a 4. řádek). Ve 3. a 4. determinantu jsou naopak stejné modře vyznačené řádky 1, 2 a 4. První dvojice se tedy liší pouze v 1. řádku, druhá dvojice ve 3. řádku:

$$\star = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_\diamond$$

Vlastnost **D3** nyní použijeme v opačném směru, přičemž:

- první řádky $\vec{u}, \vec{v}$ prvních dvou determinantů spojíme do jednoho touto lineární kombinací: $\vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$, zatímco
- třetí řádky $\vec{x}, \vec{y}$ 3. a 4. determinantu spojíme touto lineární kombinací: $2 \cdot \vec{x} - \vec{y}$.

$$\diamond = \begin{vmatrix} 1-2\cdot 2 & 0-2\cdot 1 & 2-2\cdot 0 & 1-2\cdot 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2\cdot 0-1 & 2\cdot 2-2 & 2\cdot 2-1 & 2\cdot 1-0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Další výpočet již necháváme na čtenáři. Výsledek by měl být 30.

Řešený příklad 2.4.b

Zadání

Proveďte Laplaceův rozvoj matice M podle 3. sloupce a využijte linearity determinantu, abyste redukovali počet determinantů 4. řádu. Následně dokončete výpočet determinantu.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení

V tomto příkladu použijeme stejného postupu, který už nebudeme příliš komentovat.

$$\begin{aligned} |M| &= (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + \\ &+ (-1)^{4+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{5+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =_{\star}$$

Povšimněte si nyní v prvním determinantu dvou stejných řádků, druhého a čtvrtého. Dle důsledku vlastnosti **D2** (viz *Skripta*, str. 13) to znamená, že je tento determinant roven 0. Dále už tedy budeme počítat pouze ten druhý determinant napravo.

$$\star = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3r_1 \\ -2r_1 \\ +3r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 0 & -6 \\ -3 & \mathbf{-1} & -4 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3r_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 0 & -6 \\ -3 & \mathbf{-1} & -4 \\ -5 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -7 & -6 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = [(-7) \cdot (-4)] - [(-5) \cdot (-6)] = -2$$

Výsledky příkladů

2.1.c: 7, 2.1.d: 49
2.2.c: 14, 2.2.d: 26
2.3.c: -2, 2.3.d: -11