MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 3

V tomto cvičení se budeme věnovat vektorovým prostorům a Gaussově eliminační metodě pro výpočet řešení systému lineárních rovnic. Ve skriptech těmto tématům odpovídá Přednáška 3.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

3.1 Lineární závislost vektorů

V předchozí kapitole sbírky jsme již zmínili pojem lineární kombinace řádků matice. S tím úzce souvisí lineární závislost či nezávislost vektorů. Řádky či sloupce matice můžeme chápat jako vektory a ptát se, je-li některý z nich **lineární kombinací** ostatních (viz *Skripta*, Definice 7, str. 13). Pokud tomu tak je, řekneme, že posloupnost (množina) vektorů je **lineárně závislá**, v opačném případě **lineárně nezávislá** (viz *Skripta*, Definice 10 na str. 25).

Řešený příklad 3.1.a

Zadání
Zjistěte, zda je množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ lineárně závislá, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Nejprve si vektory dáme do matice, každý na samostatný řádek.[1] Následně použijeme elementární řádkové úpravy a upravíme matici na schodový tvar (viz *Skripta*, Definice 8, str. 16). Zmíněnými úpravami přitom myslíme

1. vynásobení řádku matice nenulovým číslem,
2. výměnu pořadí dvou řádků matice,
3. přičtení lineární kombinace vybraných řádků k jinému řádku.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3r_1 \\ +2r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -5r_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matici jsme tedy převedli na schodový tvar a zůstaly čtyři řádky tak jako na začátku před zahájením převodu. Znamená to:

- Hodnost matice je 4 (viz Definice 16 hodnosti matice ve *Skriptech* na str. 49);

[1] Je zcela jedno, zda vektory vložíme do řádků či sloupců nově vzniklé matice.

- množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ je lineárně nezávislá, jelikož jsme při převodu na schodový tvar „neztratili" žádný řádek matice. Ani jeden se při úpravách nestal nulovým a není tedy lineární kombinací ostatních.

Řešený příklad 3.1.b

Zadání

Zjistěte, zda je množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ lineárně závislá, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Opět si z vektorů vytvoříme matici, kterou následně převedeme na schodový tvar:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +5r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -12 & -9 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ :3 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +5r_2 \\ -4r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +2r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že hodnost matice je 3. Jinými slovy, po úpravách na schodový tvar jsme jeden z řádků „vynulovali". To ovšem znamená, že tento řádek je lineární kombinací ostatních, tudíž množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ je lineárně závislá.

Příklad 3.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání

Zjistěte, zda je množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ lineárně závislá, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání

Zjistěte, zda je množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ lineárně závislá, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Dimenze a báze vektorového prostoru

Podívejte se ve skriptech na Definici 11 (viz str. 25), v níž jsou vysvětleny pojmy báze a dimenze vektorového prostoru. V následujících příkladech je používá i pojem podprostor vektorového prostoru, který je ve skriptech přesněji rozebrán v Přednášce 4 (Definice 13, str. 37) a my se mu budeme věnovat až v 4. cvičení. V této části sbírky zatím postačí, když budete vektorový podprostor chápat jako nějakou podmnožinu vektorového prostoru V, která je „uzavřená“ na operaci sčítání svých vektorů a násobení libovolného svého vektoru „skalárem“, tj. libovolným prvkem tělesa, na němž je prostor V definován.

Řešený příklad 3.2.a

Zadání
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Budeme postupovat podobně jako v příkladech 3.1. Zjistíme nejdříve dimenzi podprostoru W, a to naskládáním všech vektorů do matice a určením její hodnosti.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -11 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +r_3 \\ \\ +r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3r_2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :3\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -9r_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Z výpočtu je patrné, že hodnost matice je 4, tj. množina vektorů $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ je lineárně nezávislá. Platí tedy, že $\dim W = 4$. Jelikož W je podprostor $\mathbb{R}^4$, dohromady s faktem $\dim W = 4$ platí, že $W = \mathbb{R}^4$. Bází takového podprostoru může být jakákoliv posloupnost čtyř lineárně nezávislých vektorů, tedy například standardní báze $\mathbb{R}^4$

$$S_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

nebo posloupnost složená ze zadaných vektorů, tj.

$$\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Řešený příklad 3.2.b

Zadání

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ vložíme do matice, u níž zjistíme hodnost převodem matice na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ +r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2r_2 \\ +3r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Po převodu na schodový tvar se poslední řádek příslušející vektoru $\vec{u_4}$ „vynuloval“. Hodnost matice je 3, tedy i $\dim W = 3$. W je tedy 3-dimenzionální podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a jeho bází je např. posloupnost

$$\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

nebo jakákoliv jiná posloupnost složená ze tří různých vektorů množiny $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$.
[2]

Příklad 3.2.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_5} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3.3 Vektory generující vektorový prostor

V následujících příkladech budeme ověřovat, zda dimenze podprostoru generovaného množinou vektorů je stejná jako dimenze vektorového prostoru, z něhož zadané vektory bereme.

Řešený příklad 3.3.a

Zadání
Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení

[2] Připomínáme, že báze musí obsahovat lineárně nezávislé vektory. Pro libovolnou trojici vektorů zadaných v Příkladu 3.2.b tomu tak skutečně je.

Postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech, tj. vložíme všechny vektory do matice a elementárními řádkovými úpravami převedeme matici na schodový tvar.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{-4} & -1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Hodnost matice sestavené ze čtyř vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ je 2, což znamená, že je třeba odebrat dva z nich, abychom dostali lineárně nezávislou množinu vektorů. Podprostor generovaný zadanými vektory má dimenzi 2 rovnou hodnosti matice, tudíž se jedná o rovinu a vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ negenerují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Zkuste najít parametrické vyjádření a obecnou rovnici takové roviny, prochází-li počátkem $O[0;0;0]$.

Řešený příklad 3.3.b

Zadání

Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Znovu si z vektorů sestavíme matici a zjistíme její hodnost:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ \\ +3r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \\ +r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} : (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +3r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Hodnost matice sestavené ze čtyř vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ je 3. Generují tedy podprostor dimenze 3, tj. samotný vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.c (pouze s výsledkem)

Zadání

Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^4$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{u_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.3.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^4$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \vec{u_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3.4 Systém tří lineárních rovnic o třech neznámých

V této části si ukážeme Gaussovu eliminační metodu a zároveň prozkoumáme geometrickou interpretaci systému tří lineárních rovnic o třech neznámých v prostoru o třech dimenzích, tj. nám známém *3D prostoru*. Jakoukoliv lineární rovnici o třech neznámých, např. x, y, z, totiž můžeme chápat jako předpis roviny v 3D prostoru (po vhodné úpravě její obecnou rovnici). Máme-li tedy vyřešit systém tří lineárních rovnic o třech neznámých, je patrné, že vyšetřujeme vzájemnou polohu tří rovin v prostoru.

1. Řešení takového systému nemusí být **žádné**, tj. roviny se neprotínají ani v jednom bodě. Geometrická interpretace takové situace je různá: roviny mohou být rovnoběžné, případně jsou rovnoběžné pouze dvě a třetí je protíná, nebo mají po dvou vždy různou společnou průsečnici.

2. Systém také může mít **právě jedno řešení**, tj. bod, v němž se všechny tři roviny protínají.

3. Poslední možností je **nekonečně mnoho řešení**, čemuž geometrický odpovídá buď svazek rovin procházejících jednou průsečnicí (závislost na 1 parametru), nebo když všechny tři roviny splynou v jednu (závislost na 2 parametrech).

Geometrické ilustrace vzájemné polohy tří rovin jsou dostupné na této stránce.

Řešený příklad 3.4.a

Zadání
Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin r_1, r_2, r_3 je-li

$$r_1 : -x + 3y + z = 3, \quad r_2 : 2x - y - 3z = 2, \quad r_3 : -3x + 2y + 4z = 1.$$

Řešení
V této sbírce, v kapitole 1.4 Cramerovo pravidlo, jsme si uvedli, jak se systém lineárních rovnic dá zapisovat maticově. Zmínili jsme *matici systému* a *rozšířenou matici systému*, v níž si zadaný systém zapíšeme:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda má dvě části: 1. převod rozšířené matice na schodový tvar; 2. zpětný chod. Pomocí elementárních řádkových úprav tedy výše zapsanou matici upravíme na schodový tvar.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{-1}} & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{5}} & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5r_3+7r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{-1}} & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{5}} & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{-2}} & 16 \end{array}\right)$$

Je patrné, že hodnost rozšířené matice je 3, žádný řádek se „nevynuloval“. Řešením systému je v takovém případě pouze jedno. Najdeme jej pomocí zpětného chodu, tj. postupujeme od spodního řádku nahoru a pomocí rovnic si postupně vyjadřujeme hodnoty proměnných, které v dalších řádcích použijeme pro výpočet dalších proměnných.

1. Třetí řádek rozšířené matice lze rovnicově zapsat takto: $-2z = 16$. Z toho $z = -8$.

2. Druhý řádek zapíšeme touto rovnicí: $5y - z = 8$. Za proměnnou z je možné dosadit: $5y - (-8) = 8$, z čehož $5y = 0$, tedy $y = 0$.

3. První řádek je reprezentován touto rovnicí: $-x + 3y + z = 3$. Dosadíme do ní hodnoty proměnných y, z, které jsme již spočítali: $-x+3\cdot 0-8 = 3$, z čehož $x = -11$.

Nezapomeneme napsat řešení:

$$K = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Tři zadané roviny r_1, r_2, r_3 se tedy protínají právě v jednom bodě K.

Řešený příklad 3.4.b

Zadání

Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin r_1, r_2, r_3 je-li

$$r_1 : -2x + 4y + z = -1, \quad r_2 : x + y + 2z = -2, \quad r_3 : -3x + 3y - z = 1.$$

Řešení

Systém si opět zapíšeme do rozšířené matice a převedeme ji na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ +3r_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{6}} & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 2 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{6}} & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Po převodu na schodový tvar se jeden z řádků „vynuloval“, hodnost matice je tedy pouze 2. Vzhledem k počtu 3 proměnných to však znamená nekonečně mnoho řešení závislých na $3-2=1$ parametru.[3] Zpětným chodem vyjádříme tato řešení.

1. Druhý řádek matice zapíšeme rovnicí $6y+5z=-5$. Z použitých proměnných vybereme jednu z nich jako parametr, tedy např. $z=t$, kde t je libovolné reálné číslo. Druhou proměnnou y vzhledem k tomuto parametru vyjádříme:
$$6y+5t=-5 \quad \Leftrightarrow \quad 6y=-5-5t \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{5}{6}-\frac{5t}{6}$$
2. První řádek matice přepíšeme znovu do rovnice $x+y+2z=-2$. Za proměnné y,z dosadíme jejich parametrické vyjádření a vyjádříme proměnnou x:
$$x-\frac{5}{6}-\frac{5t}{6}+2\cdot t=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-2\cdot 6}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5t}{6}-\frac{2t\cdot 6}{6}=-\frac{7}{6}-\frac{7}{6}\cdot t$$

Zapíšeme řešení, přičemž od sebe oddělíme část bez parametru a část s parametrem t:
$$K=\begin{bmatrix}-\frac{7}{6}\\ -\frac{5}{6}\\ 0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-\frac{7}{6}\\ -\frac{5}{6}\\ 1\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$
Z tohoto zápisu je totiž patrné, že zapsané řešení je zároveň parametrickým vyjádřením přímky, která je průsečnící všech tří rovin r_1,r_2,r_3. Tři zadané roviny r_1,r_2,r_3 se tedy protínají právě v jednom bodě K.

Řešený příklad 3.4.c

Zadání

Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin r_1,r_2,r_3 je-li
$$r_1: x+2y+3z=-4, \quad r_2: x-y-z=3, \quad r_3: -x+4y+5z=-3.$$

Řešení

Systém si opět zapíšeme do rozšířené matice a převedeme ji na schodový tvar:
$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{1} & 2 & 3 & -4\\ 1 & -1 & -1 & 3\\ -1 & 4 & 5 & -3\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1\\ +r_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -4\\ 0 & \color{red}{-3} & -4 & 7\\ 0 & 6 & 8 & -7\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +2r_2\end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -4\\ 0 & -3 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{array}\right)$$
Po převodu na schodový tvar se poslední řádek matice „vynuloval“ nalevo

[3] Má-li systém řešení, pak je počet parametrů roven rozdílu počtu proměnných a počtu lineárně nezávislých řádků. Podrobněji vysvětlíme parametry řešení a jejich stanovení v následující části 3.5.

od svislé čáry, napravo však zůstalo nenulové číslo 7. To ovšem znamená, že hodnost matice systému je 3, kdežto hodnost rozšířené matice je 2. Nastane-li tato nerovnost, vyplývá z toho, že systém nemá řešení, tj. $K = \emptyset$.

Jak jsme si na začátku této části psali, geometricky tomu může odpovídat více možností. Zkuste sami přijít na to, zda jde o případ, kdy jsou všechny tři roviny rovnoběžné, případně jsou rovnoběžné pouze dvě a třetí je protíná, nebo mají po dvou vždy různou společnou průsečnici. Můžete roviny zapsat v programu GeoGebra 3D Grafy a nechat si je vykreslit, případně si spočítat vzájemnou polohu rovin po dvojicích.

Příklad 3.4.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin r_1, r_2, r_3 je-li

$$r_1 : x - 2y - z = -3, \quad r_2 : -x + 2y + z = 3, \quad r_3 : 2x - 4y - 2z = -6.$$

Příklad 3.4.e (pouze s výsledkem)

Zadání
Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin r_1, r_2, r_3 je-li

$$r_1 : x - 2y - z = -3, \quad r_2 : -x + y + 3z = 2, \quad r_3 : 2x - y + z = -1.$$

Příklad 3.4.f (pouze s výsledkem)

Zadání
Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin r_1, r_2, r_3 je-li

$$r_1 : 2x - 3y + z = -2, \quad r_2 : x - y + 3z = -3, \quad r_3 : -4x + 6y - 2z = 4.$$

3.5 Gaussova eliminační metoda

V předchozí části jsme si naznačili, jakým způsobem používat Gaussovu eliminační metodu, univerzální nástroj, kterým lze vyřešit jakýkoliv systém lineárních rovnic.

Počet řešení je nenulový právě tehdy, když $h(A|b) = h(A)$, kde A je matice systému, b je vektor pravých stran. Po převodu na schodový tvar můžeme zjistit hodnosti obou matic a určit počet řešení. Počet parametrů je přitom roven číslu $n - h(A|b)$, kde n je počet proměnných v systému. Podrobnější informace naleznete v Přednášce 3 (*Skripta*, str. 28–35) a také Přednášce 5 a Větě 8 (*Skripta*, str. 49–50).

Řešený příklad 3.5.a

Zadání

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1\\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2\\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 2\\
-3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 4\\
-2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & -4
\end{array}$$

Řešení

Nejdříve si vytvoříme rozšířenou matici systému a pak ji převedeme na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
3 & -2 & -3 & 4 & -2\\
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
-3 & 4 & 3 & -2 & 4\\
-2 & -4 & 2 & 4 & -4
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \\ \\ \\ \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
3 & -2 & -3 & 4 & -2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
-3 & 4 & 3 & -2 & 4\\
-2 & -4 & 2 & 4 & -4
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ -3r_1 \\ \\ +3r_1 \\ +2r_1 \end{array}
\sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
0 & -8 & 0 & 10 & -8\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 10 & 0 & -8 & 10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \\ \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & -8 & 0 & 10 & -8\\
0 & 10 & 0 & -8 & 10
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ :2 \\ :2 \end{array}
\sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & -4 & 0 & 5 & -4\\
0 & 5 & 0 & -4 & 5
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ +4r_2 \\ -5r_2 \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 9 & 0\\
0 & 0 & 0 & -9 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ +r_3 \end{array}
\sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 9 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ :9 \\ \\ \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -2 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Poslední matice již je ve schodovém tvaru. Je také patrné, že systém bude mít řešení, protože $h(A|b) = h(A) = 3$, kde A je matice systému a $(A|b)$ rozšířená matice systému. Počet proměnných systému je $n = 4$, kdežto $h(A|b) = 3$, budeme tedy potřebovat $n - h(A|b) = 4 - 3 = 1$ parametr k zápisu nekonečně mnoha řešení.

Postupujme zpětným chodem od posledního řádku rozšířené matice:

1. spodní řádek je vlastně zápisem rovnice $1 \cdot x_4 = 0$, z čehož $x_4 = 0$.

2. prostřední řádek lze zapsat jako rovnici $x_2 + x_4 = 1$. Víme však z předchozího bodu, že $x_4 = 0$, můžeme tedy dosadit: $x_2 + 0 = 1$, z čehož $x_2 = 1$.

3. horní řádek je symbolickým zápisem rovnice $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2$. Dosadíme-li za $x_2 = 1,\ x_4 = 0$, dostaneme:

$$x_1 + 2 \cdot 1 - x_3 - 2 \cdot 0 = 2 \;\Leftrightarrow\; x_1 - x_3 = 0.$$

Jednu z proměnných x_1, x_3 zvolíme jako parametr, třeba $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Do poslední rovnice $x_1 - x_3 = 0$ tedy dosadíme a získáme vyjádření x_1:

$$x_1 - t = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = t.$$

Zapíšeme řešení, přičemž od sebe opět oddělíme část bez parametru a část s parametrem t:

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Řešení lze geometricky interpretovat jako přímku v prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešený příklad 3.5.b

Zadání

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \end{array}$$

Řešení

Opět si systém zapíšeme pomocí rozšířené matice, kterou převedeme na schodový tvar.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 7 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -4r_1 \\ -5r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \\ -3r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Poslední matice již je ve schodovém tvaru. Pro hodnost matice systému A a rozšířené matice systému $(A|b)$ platí $h(A|b) = h(A) = 2$, tedy systém má řešení. Počet proměnných systému je $n = 4$, kdežto $h(A|b) = 2$, budeme tedy potřebovat $n - h(A|b) = 4 - 2 = 2$ parametry k zápisu nekonečně mnoha řešení. Postupujme zpětným chodem od posledního řádku rozšířené matice:

1. spodní řádek matice lze převést na tuto rovnici: $-x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$. Dvě z proměnných rovnice zvolíme jako parametry, například $x_3 = s$, $x_4 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$, a dosadíme je zpět, čímž dostaneme vyjádření x_2:

$$-x_2 - 3s + 4t = 1 \;\Leftrightarrow\; -x_2 = 1 + 3s - 4t \;\Leftrightarrow\; x_2 = -1 - 3s + 4t$$

2. horní řádek zapíšeme touto rovnicí: $x_1+2x_2+x_3-x_4=1$. Za proměnné x_2, x_3, x_4 dosadíme a získáme vyjádření poslední proměnné x_1:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\cdot(-1-3s+4t)+s-t &= 1 \\ x_1 - 2 - 6s + 8t + s - t &= 1 \\ x_1 - 2 - 5s + 7t &= 1 \\ x_1 &= 3 + 5s - 7t \end{aligned}$$

Zapíšeme řešení, přičemž od sebe opět oddělíme část bez parametrů a část s parametry s, t:

$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Řešení lze geometricky interpretovat jako rovinu v prostoru $\mathbb{R}^4$, jejíž směrové vektory jsou zapsané za parametry s, t.

Příklad 3.5.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -14 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \end{array}$$

Příklad 3.5.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -4 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -7 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \end{array}$$

3.6 Souřadnice vektoru v nestandardní bázi

Nejběžnějším způsobem, jak zadat vektor, je zápis jeho souřadnic ve standardní bázi. Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ jde o bázi

$$S_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se jedná o bázi

$$S_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Někdy však bude účelné zvolit jinou bázi, v níž budeme vektory vyjadřovat. Potom bude potřeba najít pro vektory zadané ve standardní bázi souřadnice v jiné bázi, se kterou budeme nadále pracovat.

Řešený příklad 3.6.a

Zadání

Je dána množina vektorů $M = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ověřte, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Následně nalezněte souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, je-li

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Nejprve ověříme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Dáme je do matice a zjistíme její hodnost tak, že ji převedeme na schodový tvar.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -r_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -5r_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -2 & -6 \\ 0 & \mathbf{4} & 14 \\ 0 & 11 & 25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4r_3 - 11r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -2 & -6 \\ 0 & \mathbf{4} & 14 \\ 0 & 0 & \mathbf{-54} \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je 3, takže vektory jsou lineárně nezávislé, a tudíž generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Nyní hledejme souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi α, což znamená nalézt koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{v} + \alpha_3 \cdot \vec{w}$. Přepíšeme-li si to do vektorových souřadnic, získáme tento systém:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Převeďme si tento systém do rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3\alpha_1 & - & 2\alpha_2 & - & 5\alpha_3 & = & 6 \\ -2\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & -6 \\ -4\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & 5\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

K řešení systému použijeme Gaussovu eliminační metodu:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ -4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ -2r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{-1}} & -2 & -6 & 12 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{-1}} & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 4 & 13 & -30 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{2}} & -7 & 12 \\ 0 & 4 & 13 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 27 & -54 \end{array}\right)$$

Hodnost matice systému je stejná jako hodnost rozšířené matice systému, tj. 3. Vzhledem k počtu proměnných má systém právě jedno řešení, které nalezneme zpětným chodem:

1. spodní řádek je zápisem rovnice $27\alpha_3 = -54$, z čehož $\alpha_3 = -2$.
2. prostřední řádek zapíšeme jako rovnici $2\alpha_2 - 7\alpha_3 = 12$. Dosadíme-li za α_3, dostáváme

$$2\alpha_2 - 7 \cdot (-2) = 12 \;\Leftrightarrow\; 2\alpha_2 = -2 \;\Leftrightarrow\; \alpha_2 = -1.$$

3. horní řádek znamená rovnici $-\alpha_1 - 2\alpha_2 - 6\alpha_3 = 12$. Dosadíme-li za α_2, α_3, dostáváme

$$-\alpha_1 - 2 \cdot (-1) - 6 \cdot (-2) = 12 \;\Leftrightarrow\; -\alpha_1 + 14 = 12 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 = 2$$

Vektor $\vec{x}$ má tedy v bázi α tyto souřadnice:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}_\alpha$$

Řešený příklad 3.6.b

Zadání

Je dána množina vektorů $M = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ověřte, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Následně nalezněte souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, je-li

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Ověříme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Vložíme je do matice a zjistíme její hodnost.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je 3, takže vektory jsou lineárně nezávislé, a tudíž generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Hledejme souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi α, což znamená nalézt koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{v} + \alpha_3 \cdot \vec{w}$. Přepíšeme-li si to do vektorových souřadnic, získáme tento systém:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Převeďme si tento systém do rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & -2 \\ 2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & 4\alpha_3 & = & 1 \\ & - & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

K řešení systému použijeme Gaussovu eliminační metodu:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :5 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +2r_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Hodnost matice systému je stejná jako hodnost rozšířené matice systému, tj. 3. Vzhledem k počtu proměnných má systém právě jedno řešení, které nalezneme zpětným chodem:

1. spodní řádek je zápisem rovnice $-\alpha_3 = 2$, z čehož $\alpha_3 = -2$.
2. prostřední řádek zapíšeme jako rovnici $\alpha_2 = 1$, a tedy máme rovnou hodnotu koeficientu α_2.
3. horní řádek znamená rovnici $\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = -2$. Dosadíme-li za α_2, α_3, dostáváme

$$\alpha_1 - 1 + 2 \cdot (-2) = -2 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 - 5 = -2 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 = 3$$

Vektor $\vec{x}$ má tedy v bázi α tyto souřadnice:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\alpha}$$

Příklad 3.6.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Je dána množina vektorů $M = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ověřte, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Následně nalezněte souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, je-li

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.6.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Je dána množina vektorů $M = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ověřte, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Následně nalezněte souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, je-li

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Výsledky příkladů

3.1.c: Lineárně závislá množina vektorů (podprostor dimenze 2);
3.1.d: Lineárně závislá množina vektorů (podprostor dimenze 3).
3.2.c: $\dim(W) = 2$, bází W je např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$;
3.2.d: $\dim(W) = 3$, bází W je např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$.
3.3.c: Dimenze množiny vektorů je 4, takže generují $\mathbb{R}^4$;
3.3.d: Dimenze množiny vektorů je 3, takže negenerují $\mathbb{R}^4$.
3.4.d: Systém nemá řešení, tj. roviny se neprotínají, jsou všechny rovnoběžné;
3.4.e: Systém má jedno řešení, roviny se protínají právě v bodě $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$;
3.4.f: Systém nemá řešení, roviny r_1, r_3 jsou rovnoběžné, rovina r_2 je protíná.
3.5.c: Systém nemá řešení.

3.5.d: Systém má právě jedno řešení $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3.6.c: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_\alpha$

3.6.d: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}_\alpha$