MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 4

V tomto cvičení se budeme zabývat **podprostory vektorových prostorů** a uzavřeností na jejich sjednocení, resp. průnik. Ve skriptech tomu odpovídá Přednáška 4.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

4.1 Ověření podmínek vektorového podprostoru

Podívejte se na Definici 13 (viz *Skripta*, str. 37) a následující poznámku o tom, že pro vektorový podprostor platí stejné podmínky jako pro vektorový prostor, tedy zejména že **musí obsahovat nulový vektor** $\vec{o}$. Připomínáme ještě dva základní triviální podprostory vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$:

- $\{\vec{o}\}$ (podprostor obsahující nulový vektor),
- celý prostor V.

Řešený příklad 4.1.a

Zadání
Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li

(a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x \cdot y \cdot z = 0 \right\};$

(c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ 1+2s \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad s, t \in \mathbb{R} \right\};$

(d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s+t \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}.$

Řešení
Podpříklad (a): Jedná se o konečnou množinu tří vektorů. Už vzhledem tomu, že neobsahuje nulový vektor, nemůže být W podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Podpříklad (b): W je nekonečná množina vektorů zahrnující též nulový vektor $\vec{o}$. Je patrné, že libovolný vektor $\vec{w} \in W$ musí mít alespoň jednu souřadnici nulovou, aby byla splněna podmínka z definice podprostoru. Vhodným protipříkladem ukážeme neuzavřenost W na sčítání dvou vektorů. Buď

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oba vektory patří do W, jelikož součin jejich souřadnic je roven nule. Pokud je však sečteme, dostáváme:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W,$$

protože součin souřadnic vektoru $\vec{u}+\vec{v}$ je roven 1, nikoliv 0. Není tedy splněna podmínka

$$1 : \forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W,$$

tj. uzavřenost na součet vektorů. Množina vektorů W tedy není podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Podpříklad (c): W je opět nekonečná množina vektorů reprezentující rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$. Vskutku, W lze pro libovolné $s, t \in \mathbb{R}$ rozepsat takto:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ 1+2s \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Za parametry s, t jsou dva lineárně nezávislé vektory generující rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$, která je kromě nich ještě určena bodem $[0; 0; 1]^T$. Rovina W neprochází počátkem, takže neobsahuje nulový vektor. Skutečně, nejsme schopni najít $s, t \in \mathbb{R}$ takové, aby platilo

$$\begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ 1+2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj. nenajdeme řešení systému

$$\begin{array}{ccccccc} & & s & + & t & = & 0, \\ & & s & - & t & = & 0, \\ 1 & + & 2s & & & = & 0, \end{array}$$

protože ze 3. rovnice vychází $s = -\frac{1}{2}$, což po dosazení do prvních dvou rovnic dává pokaždé jinou hodnotu t. Množina W tedy není podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, jelikož neobsahuje nulový vektor.

Podpříklad (d): Stejně jako v předchozím podpříkladu, W je opět nekonečná množina vektorů reprezentující rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$. Opět, W lze pro libovolné $s, t \in \mathbb{R}$ rozepsat takto:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s+t \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Za parametry s, t jsou dva lineárně nezávislé vektory generující rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$, která je kromě nich ještě určena počátkem $[0; 0; 0]^T$. Množina vektorů W tedy obsahuje nulový vektor, který z jejího předpisu získáme volbou $s = t = 0$. Narozdíl od předchozího podpříkladu tedy je množina W podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Poznámka: Podobné je to i v případě vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ a podprostorů dimenze o 1 nižší, tj. přímek. Prochází-li počátkem kartézského souřadného systému, obsahují nulový vektor, a tudíž tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$. V opačném případě, tj. neprochází-li přímka počátkem, není podprostorem $\mathbb{R}^2$. Viz také *Skripta*, Příklad 15 na str. 37.

Řešený příklad 4.1.b

Zadání

Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li

(a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 0 \right\}$;

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 5 \right\}$;

(c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z \right\}$;

(d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} s - 2t \\ -s + 2t \\ 2s - 4t \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$;

Řešení

Podpříklad (a): Podmínka pro vektory množiny W je zapsána ve tvaru obecné rovnice roviny, která navíc prochází počátkem. W tedy zahrnuje libovolný (směrový) vektor této roviny (včetně nulového), a tudíž je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Podpříklad (b): podmínka na souřadnice

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 5 \tag{1}$$

znamená, že do množiny W bereme pouze vektory, jejichž velikost je menší nebo rovna 5. Jistě dokážeme najít protipříklad vektoru $\vec{u} \in W$ a skaláru $t \in \mathbb{R}$ tak, že neplatí podmínka "1"na vektorový podprostor, tj. $t \cdot \vec{u} \notin W$. Například:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t = 2.$$

Dosadíme-li souřadnice $\vec{u}$ do podmínky 1, zjistíme, že je splněna, protože

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3 \leq 5,$$

tedy $\vec{u} \in W$. Vektor $t \cdot \vec{u}$ má tyto souřadnice:

$$t \cdot \vec{u} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Souřadnice vektoru $2\vec{u}$ dosadíme do podmínky (3):

$$\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6 \nleq 5,$$

tedy $t \cdot \vec{u} \notin W$, a tudíž W není podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Podpříklad (c): budeme postupovat algebraicky. Zvolme dva libovolné vektory množiny W:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Dále nechť $t \in \mathbb{R}$ je také libovolné.

- Oba vektory sečteme:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix},$$

  tedy $\vec{u} + \vec{v} \in W$, protože má všechny tři souřadnice stejné.

- Skalárem t vynásobíme vektor $\vec{v}$:

$$t \cdot \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tb \\ tb \\ tb \end{pmatrix},$$

  tedy i vektor $t \cdot \vec{v}$ patří do W, protože má všechny tři souřadnice stejné.

Potvrdili jsme, že W je podprostor $\mathbb{R}^3$.

Podpříklad (d): Množinu vektorů W lze pro libovolné $s, t \in \mathbb{R}$ rozepsat takto:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} s-2t \\ -s+2t \\ 2s-4t \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Za parametrem t je vektor, který je -2-násobkem prvního vektoru přislušejícího parametru s. Stačí tedy vybrat jeden z vektorů, protože druhý už žádný nový směr nepřidává. Zápis

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

představuje přímku v prostoru, která prochází počátkem. W je tedy podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Příklad 4.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání

Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li

(a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y = z \right\};$

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y \neq z \right\};$

(c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} s - 2t \\ 1 \\ -s + 2t \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad s, t \in \mathbb{R} \right\};$

(d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x \leq y \leq z \right\}.$

Příklad 4.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání

Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li

(a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} s - 2t \\ s + 2t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad s, t \in \mathbb{R} \right\};$

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y \leq z \right\};$

(c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y \in \mathbb{R} \wedge x = y \right\}.$

(d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.ž. } \quad x, y, z \in \mathbb{R} \wedge |x| = |y| \right\}.$

4.2 Součet a průnik podprostorů

Doporučujeme nahlédnout do *Skript* a kapitoly 4, v níž je na straně 38 vysvětlena uzavřenost vektorových podprostorů na základní množinové operace sjednocení a průnik (Věty 4a, 4b). Důkaz Věty 4b a příklad 17 nabízejí na konkrétním příkladu vysvětlení, proč pro dva podprostory S_1, S_2 nemusí být jejich sjednocení $S_1 \cup S_2$ vektorovým podprostorem. Tyto potíže jsou následně vyřešeny zavedením nové operace: tzv. součtu podprostorů, která jejich sjednocení „lineárně obalí“, viz *Skripta* a Definice 14, 15. Takto provedená operace na dvou libovolných podprostorech už je uzavřená, tj. její výsledek je opět vektorový podprostor.

Řešený příklad 4.2.a

Zadání

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ a $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Nejdříve si spočítejme dimenzi obou podprostorů W_1, W_2:

$$W_1 : \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$W_2 : \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{-3} & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Z obou výpočtů je patrné, že $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, tj. oba podprostory si můžeme představit jako roviny.

Začneme součtem $W_1 + W_2$. Vektory generující oba podprostory dáme do společné matice a upravíme na schodový tvar, čímž zjistíme $\dim(W_1 + W_2)$. Do této matice již nemusíme dávat vektory, o nichž víme, že jsou závislé na ostatních, tj. u_3, v_3.

$$\begin{matrix} \vec{u_1} : \\ \vec{u_2} : \\ \vec{v_1} : \\ \vec{v_2} : \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ +r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :3 \\ :4 \\ :3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2) = 3$$

Úpravou matice jsme zjistili, že vektor $\vec{v_2}$ je lineárně závislý na zbývajících třech vektorech daných do matice. Bází podprostoru $W_1 + W_2$ je např.

$$\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1}),$$

nebo jakákoliv jiná lineárně nezávislá posloupnost tří vektorů. Jelikož $\dim \mathbb{R}^3$ je stejná jako dimenze součtu $W_1 + W_2$, platí $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

Máme-li spočítanou dimenzi podprostorů W_1, W_2 a součtu $W_1 + W_2$, dokážeme pomocí vzorce

$$\boxed{\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)} \tag{2}$$

rychle zjistit dimenzi průniku obou podprostorů:

$$3 = 2 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2) \quad \Longrightarrow \quad \dim(W_1 \cap W_2) = 1.$$

Průnikem podprostorů W_1, W_2 by tedy měl být podprostor dimenze 1, tj. přímka procházející počátkem. Hledáme tedy její směrový vektor $\vec{x}$, který lze vyjádřit lineární kombinací vektorů generujících W_1 i W_2. To lze symbolicky zapsat takto:

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\vec{x} = \beta_1 \cdot \vec{v_1} + \beta_2 \cdot \vec{v_2} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Z obou pravých stran předchozích rovnic můžeme vytvořit novou rovnici, jelikož mají stejnou levou stranu:

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V předchozím výpočtu jsme nejprve pravou stranu rovnice převedli nalevo. Poté jsme ještě změnili znaménko koeficientů β_1, β_2 tak, že jsme oba příslušející vektory vynásobili -1. Systém jsme si tímto způsobem připravili proto, abychom jej mohli zapsat ve formě rozšířené matice a spočítali jeho řešení, přičemž vektory zapíšeme do sloupců.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \color{red}{\mathbf{1}} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{3}} & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zpětným chodem nyní zjistíme hodnoty koeficientů $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$:

1. poslední řádek je zápisem rovnice $-4\beta_1 = 0$, z čehož $\beta_1 = 0$.

2. prostřední řádek je rovnice $3\alpha_2 - 4\beta_1 + 3\beta_2 = 0$. Dosadíme $\beta_1 = 0$ a získáme rovnici $3\alpha_2 + 3\beta_2 = 0$. Zvolme za parametr např. $\beta_2 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Dosazením parametru získáme vyjádření: $3\alpha_2 + 3t = 0$, z čehož po pár jednoduchých úpravách máme $\alpha_2 = -t$.

3. první řádek znamená rovnici $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \beta_1 = 0$. Dosazením $\alpha_2 = -t$ a $\beta_1 = 0$ dostáváme $\alpha_1 - 2 \cdot (-t) = 0$, z čehož $\alpha_1 = -2t$.

Vypočítané koeficienty můžeme dosadit do rovnic 3, 4. Stačí do jedné z nich, ale my kvůli kontrole uděláme obojí:

$$\vec{x} = -2t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oba výsledné vektory za parametrem t jsou násobky sebe sama. Je tedy patrné, že do báze podprostoru $W_1 \cap W_2$ stačí vybrat jeden z nich, resp. jeho „pěkný“ násobek:

$$\alpha_{W_1 \cap W_2} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Řešený příklad 4.2.b

Zadání

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ a $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Nejdříve si spočítejme dimenzi obou podprostorů W_1, W_2:

$$W_1 : \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$W_2 : \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Z obou výpočtů je patrné, že $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, tj. oba podprostory si můžeme představit jako roviny.

Začneme součtem $W_1 + W_2$. Vektory generující oba podprostory (s výjimkou vektorů u_3, v_3 lineárně závislých na ostatních) dáme do společné matice a zjistíme $\dim(W_1 + W_2)$.

$$\begin{array}{r} \vec{u_1}: \\ \vec{u_2}: \\ \vec{v_1}: \\ \vec{v_2}: \end{array} \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ +r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \color{red}{-1} & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +3r_2 \\ -4r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že $\dim(W_1 + W_2) = 2$, po úpravě na schodový tvar matice vyšla najevo lineární závislost vektorů $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ na zbývajících dvou vektorech $\vec{u_1}, \vec{u_2}$. Báze podprostoru $W_1 + W_2$ je stejná jako báze W_1:

$$\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$$

Pro dimenzi průniku $W_1 \cap W_2$ to dle vzorce 2 znamená:

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ 2 &= 2 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ -2 &= -\dim(W_1 \cap W_2) \\ 2 &= \dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

Potvrdili jsme si fakt, který už byl zřejmý i z rovnosti bází $\alpha_{W_1+W_2} = \alpha_{W_1}$. Totiž, podprostor W_2 už do součtu $W_1 + W_2$ nic nového nepřidává. Rovina W_2 totiž splývá s rovinou W_1. Díky tomu můžeme bez potvrzujícího výpočtu říct, že taktéž $W_1 \cap W_2 = W_1$. Báze $W_1 \cap W_2$ je stejná jako báze $W_1 + W_2$:

$$\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$$

Poznámka: V předchozích příkladech, kdy jsme brali v potaz vektorový prostor $\mathbb{R}^3$, byla dimenze obou dílčích podprostorů W_1, W_2 vždy 2. Mohou však nastat další netriviální případy, tj. W_1 či W_2 mohou mít dimenzi 1 (tj. jsou přímkami) či 3 (tj. reprezentují celý prostor $\mathbb{R}^3$). Určením dimenze a báze jejich součtu a průniku tak vlastně vyšetřujeme **vzájemnou polohu vektorových podprostorů**.

Řešený příklad 4.2.c

Zadání

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou zadány podprostory $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ a $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2,\ W_1 \cap W_2$, je-li:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Opět nejdříve určíme dimenze obou podprostorů:

$$W_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & -4 & -13 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 5r_3 - 4r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -25 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim W_1 = 3$$

$$W_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & -6 \\ 2 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & -4 & -11 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 5r_3 - 4r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -19 & 31 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim W_2 = 3$$

Protože žádný z vektorů není závislý na ostatních, vložíme nyní všech šest vektorů do matice a určením její hodnosti zjistíme dimenzi součtu $W_1 + W_2$:

$$\begin{matrix} \vec{u_1} : \\ \vec{u_2} : \\ \vec{u_3} : \\ \vec{v_1} : \\ \vec{v_2} : \\ \vec{v_3} : \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & -6 \\ 2 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & -4 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & -4 & -13 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -r_2 \\ -r_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & -4 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_3 \\ \\ \\ \text{škrtni} \\ \text{škrtni} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -4r_2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -25 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -25 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -25r_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2) = 4$$

Díky úpravám jsme zjistili lineární závislost vektorů $\vec{v_2}, \vec{v_3}$ na zbylých čtyřech vektorech, bází součtu $W_1 + W_2$ tedy může být např.

$$\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{v_1}).$$

Pro dimenzi průniku $W_1 \cap W_2$ to dle vzorce 2 znamená:

$$\begin{aligned}
\dim(W_1 + W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\
4 &= 3 + 3 - \dim(W_1 \cap W_2) \\
-2 &= -\dim(W_1 \cap W_2) \\
2 &= \dim(W_1 \cap W_2)
\end{aligned}$$

Je tedy patrné, že v bázi průniku $W_1 \cap W_2$ budou dva vektory. Pro každý z nich platí, že lze vyjádřit lineární kombinací vektorů generujících W_1 i W_2, díky čemuž dostáváme:

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \alpha_3 \cdot \vec{u_3} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\vec{x} = \beta_1 \cdot \vec{v_1} + \beta_2 \cdot \vec{v_2} + \beta_3 \cdot \vec{v_3} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Podobně jako u Řešeného příkladu 4.2.a si obě vyjádření pro neznámý vektor $\vec{x}$ vložíme do rovnice a upravíme tak, abychom mohli použít Gaussovu eliminační metodu pro výpočet koeficientů:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} - \beta_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{o}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{o}$$

Tento systém o šesti neznámých nyní vložíme do matice (kvůli uspoře místa už nebudeme zapisovat nulový sloupec napravo) a pomocí Gaussovy eliminační řešení najdeme řešení:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -4r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -10 & -13 & 1 & 10 & 13 \\ 0 & -9 & -7 & 5 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2r_2 + r_4 \\ -2r_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -9 & -7 & 5 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +9r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{-5}} & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 50 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 5r_4+2r_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 252 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední matice obsahující čtyři řádky už je ve schodovém tvaru. Vzhledem k šesti proměnným je třeba zavést dva parametry $s, t \in \mathbb{R}$. Uděláme to při aplikací zpětného chodu:

1. poslední řádek je zápisem rovnice $252\beta_1 = 0$, z čehož $\beta_1 = 0$.
2. předposlední řádek znamená rovnici $-5\alpha_3 + \beta_1 + 5\beta_3 = 0$. Dosadíme $\beta_1 = 0$ a jeden z koeficientů α_3, β_3 zvolíme jako parametr, třeba $\beta_3 = s$:
$$-5\alpha_3 + 0 + 5s = 0 \Leftrightarrow -5\alpha_3 = -5s \Leftrightarrow \alpha_3 = s$$
3. druhý řádek zapíšeme rovnicově takto: $\alpha_2 + \alpha_3 + 5\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0$. Můžeme dosadit za $\alpha_3, \beta_1, \beta_3$. Jeden ze zbývajících koeficientů α_2, β_2 zvolíme jako parametr, třeba $\beta_2 = t$:
$$\alpha_2 + s + 5 \cdot 0 - t - s = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = t$$
4. první řádek je rovnicí $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - \beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 = 0$. Kromě α_1 jsou všechny ostatní koeficienty známy, tak je dosadíme a vypočítáme vyjádření α_1:
$$\alpha_1 + 2t + 3s - 0 - t - 2s = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -s - t$$

Vypočítané koeficienty můžeme dosadit do rovnic 5, 6. Stačí do jedné z nich, ale my to kvůli kontrole uděláme obojí:

$$\vec{x} = (-s-t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Obě dvojice vektorů za parametry s, t jsou stejné, kontrola proběhla v pořádku. Je tedy patrné, že báze podprostoru $W_1 \cap W_2$ je:

$$\alpha_{W_1 \cap W_2} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

Závěr: Průnikem obou podprostorů je tedy rovina určená vektory $\vec{v_2}, \vec{v_3}$, dohromady (tj. v součtu) tvoří W_1, W_2 celý prostor $\mathbb{R}^4$.

Příklad 4.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ a $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.2.e (pouze s výsledkem)

Zadání
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány podprostory $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ a $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.2.f (pouze s výsledkem)

Zadání
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou zadány podprostory $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ a $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Výsledky příkladů

4.1.c:
(a) ano (jde o rovinu procházející počátkem);
(b) ne (např. $\vec{o} \notin W$);

(c) ne, jde o přímku neprocházející počátkem;
(d) ne, protipříklad: $\vec{v} = (1;2;3)^T \in W, t = -1$, ale $t \cdot \vec{v} = (-1;-2;-3)^T \notin W$.
4.1.d:
(a) ano, jde o rovinu procházející počátkem;
(b) ne, protipříklad: $\vec{v} = (1;2;4)^T \in W, t = -1$, ale $t \cdot \vec{v} = (-1;-2;-4)^T \notin W$;
(c) ano, jde o rovinu procházející počátkem;
(d) ne, protipříklad: $\vec{u} = (1;1;0)^T \in W, \vec{v} = (-1;1;0)^T \in W$, ale $\vec{u} + \vec{v} = (0;2;0)^T \notin W$.

4.2.d: $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 2, \dim(W_1 + W_2) = 3, \dim(W_1 \cap W_2) = 2$, báze součtu je libovolná posloupnost tří lineárně nezávislých vektorů, báze $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ (tj. vektory generující rovinu W_2).

4.2.e: $\dim W_1 = 2, \dim W_2 = 1, \dim(W_1 + W_2) = 3, \dim(W_1 \cap W_2) = 0$, báze součtu je libovolná posloupnost tří lineárně nezávislých vektorů, báze $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{o})$ (rovina a přímka se protínají v počátku).

4.2.f: $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 2, \dim(W_1 + W_2) = 3, \dim(W_1 \cap W_2) = 2$, báze $\alpha_{W_1 + W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$, báze $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ (rovina W_2 celá leží v podprostoru W_1).