MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 5

Naplní 5. cvičení jsou matice, jejich vlastnosti a operace nad nimi včetně inverzní matice. Ve *Skriptech* tomu odpovídá část kapitoly 5 počínaje stranou 55 a začátek kapitoly 6 konče stranou 65. Součástí této sbírky nebudou příklady na sčítání matic, jelikož jde o poměrně triviální operaci vyžadující pouze jedinou podmínku: aby obě sčítané matice byly stejného typu, tj. měly stejný počet řádků i sloupců. Další podrobnosti k této maticové operaci najdete ve *Skriptech*, Definici 19 a Větě 11 na stránkách 55–56.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

5.1 Násobení matic

Násobení matic $A \cdot B$ je možné provést právě tehdy, když je matice A typu $m \times k$ a matice B typu $k \times n$, kde $k, m, n \in \mathbb{N}$, neboli

(**) počet sloupců 1. matice je stejný jako počet řádků 2. matice.

Výsledkem součinu $A \cdot B$ je matice C typu $m \times n$, jejíž jednotlivé prvky c_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ získáme pomocí vzorce

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj}} \tag{1}$$

Podrobnější informace lze nalézt ve *Skriptech* a Definici 20, Příkladu 25 a Větě 12 na stránkách 56–59. Dle Poznámky na str. 56 odpovídá prvku c_{ij} skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B. Bereme-li řádky matice A a sloupce matice B jako vektory, tak je prostřednictvím skalárního součinu násobíme „po složkách" a tyto součiny sečteme.

Řešený příklad 5.1.a

Zadání
Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Které dvojice matic vybíraných z A, B, C je možné vynásobit? Součiny matic v případech, kdy je to možné, proveďte.

Řešení
Nejdříve stanovíme typ všech tří matic:

- A je typu 2×3,
- B je typu 2×4,
- C je typu 3×2.

Dle podmínky (**) je možné provést součin matic A, C, a to oběma směry, tj. $A \cdot C$ i $C \cdot A$. Pouze „z jedné strany" je možné vypočítat $C \cdot B$.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 52 & 24 \\ 21 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 7 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 15 \\ 10 & 15 & 37 \\ 10 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 6 & 1\cdot 7 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 4\cdot(-4) & 3\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 6 & 3\cdot 7 + 4\cdot 1 \\ 5\cdot 3 + 0\cdot(-4) & 5\cdot 2 + 0\cdot 0 & 5\cdot 1 + 0\cdot 6 & 5\cdot 7 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 13 & 9 \\ -7 & 6 & 27 & 25 \\ 15 & 10 & 5 & 35 \end{pmatrix}$$

Řešený příklad 5.1.b

Zadání

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Které dvojice matic vybíraných z A, B, C je možné vynásobit? Součiny matic v případech, kdy je to možné, proveďte.

Řešení

Nejdříve stanovíme typ všech tří matic:

- A je typu 2×2,
- B je typu 3×2,
- C je typu 3×3.

Dle podmínky (**) je možné provést součiny $B \cdot A$ a $C \cdot B$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 3 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 \\ 3\cdot 3 + (-2)\cdot 1 & 3\cdot 2 + (-2)\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 3 & 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) + 0\cdot(-2) \\ 2\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 0\cdot 3 & 2\cdot 0 + (-3)\cdot(-1) + 0\cdot(-2) \\ 4\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 3 & 4\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$

Příklad 5.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Které dvojice matic vybíraných z A, B, C je možné vynásobit? Součiny matic v případech, kdy je to možné, proveďte.

Příklad 5.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Které dvojice matic vybíraných z A, B, C je možné vynásobit? Součiny matic v případech, kdy je to možné, proveďte.

Poznámka: Zkuste si sami odpovědět na obecné otázky, které se k násobení matic logicky nabízejí. Odpovědi lze nalézt ve *Skriptech*.

1. Mohu vynásobit dvě libovolné matice A, B? Pokud ne, co pro ně musí platit?
2. Za jakých podmínek je možné současně uskutečnit součin matic $A \cdot B$ i $B \cdot A$?
3. Je násobení matic komutativní, tj. platí vždy $A \cdot B = B \cdot A$? Jinými slovy: je-li možné provést $A \cdot B$ i $B \cdot A$, dostanu v obou případech jako výsledek stejnou matici?
4. Za jakých podmínek jsou matice $A \cdot B$ a $B \cdot A$ stejného typu?
5. Existují tzv. dělitelé nuly, tj. dvě nenulové matice A, B, jejichž součinem je matice samých nul?

5.2 Inverzní matice

Nyní se budeme zabývat pouze **čtvercovými maticemi** typu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$, tj. maticemi, které mají stejný počet řádků jako sloupců. Ve *Skriptech* jsou uvedeny jejich základní vlastnosti (viz Věta 12 na str. 57–59). V Definici 21 jsou představeny singulární a **regulární matice**. Z Poznámky na stranách 59–60 vyplývá, že inverzní matici lze nalézt pouze k regulární matici A typu $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$), pro níž jsou splněny tyto vzájemně ekvivalentní podmínky:

- determinant $|A| \neq 0$,
- hodnost $h(A) = n$,
- řádky matice A jsou lineárně nezávislé,
- systém lineárních rovnic $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ má vždy pouze jediné řešení pro libovolný vektor $\vec{b}$ pravých stran rovnic.

Pro nalezení inverzní matice se používá tzv. **Gaussova-Jordanova metoda**, kterou si ukážeme v následujících řešených příkladech.

Řešený příklad 5.2.a

Zadání
Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že je regulární. Pokud ano, nalezněte k matici A inverzní matici A^{-1}.

Řešení
Nejprve zjistíme hodnost matice:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -5r_1 \\ -4r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{-1}} & -9 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $h(A) = 3$, jedná se tedy o regulární matici, k níž můžeme najít inverzní matici, což provedeme pomocí Gaussovy-Jordanovy metody. Vytvoříme rozšířenou matici, v níž nalevo bude matice A, napravo jednotková matice E_3. Následně tuto matici upravujeme pomocí elementárních řádkových úprav tak, abychom na levé straně „vyrobili“ jednotkovou matici. Na konci našeho snažení by matice vpravo měla být inverzní.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -5r_1 \\ -4r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{-1}} & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2r_3 \\ +9r_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{-1}} & 0 & 4 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +r_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Na levé straně je již jednotková matice, napravo tedy máme inverzní matici

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 \\ -4 & 8 & -9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešený příklad 5.2.b

Zadání
Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že je regulární. Pokud ano, nalezněte k matici A inverzní matici A^{-1}.

Řešení
Nejprve zjistíme hodnost matice:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $h(A) = 3$, jedná se tedy o regulární matici, k níž můžeme najít inverzní matici, což provedeme pomocí Gaussovy-Jordanovy metody.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2r_3 \\ -2r_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Na levé straně je jednotková matice, napravo tedy dostáváme inverzní matici

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 2 & \frac{5}{2} & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5.2.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že je regulární. Pokud ano, nalezněte k matici A inverzní matici A^{-1}.

Příklad 5.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání

Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že je regulární. Pokud ano, nalezněte k matici A inverzní matici A^{-1}.

5.3 Maticová reprezentace řádkových úprav

Důkaz Gaussovy-Jordanovy metody pro výpočet inverzní matice A^{-1} (viz *Skripta*, Věta 14, str. 64–65) je založen na reprezentaci elementárních řádkových úprav matice A obnásobením této matice jinou regulární maticí zleva. Ve *Skriptech* (viz Věta 13 a Příklad 26 na str. 63–64) je uvedena ukázka takové reprezentace, když konkrétní úpravy vybrané matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

které směřují k transformaci na jednotkovou matici, jsou zároveň realizovány postupným přinásobováním matic $P_1, \ldots, P_6$ k matici A. Nalezení matice reprezentující danou řádkovou úpravu si procvičíme v následujících příkladech.

Řešený příklad 5.3.a

Zadání

S maticí

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

proveďte následující tři úpravy

- u_1: výměna 1. a 2. řádku,
- u_2: přičtení 4-násobku 1. řádku k 2. řádku,
- u_3: vynásobení 3. řádku číslem 2,

a určete matici B, která pomocí výše uvedených úprav matice A vznikla. Následně nalezněte matice U_1, U_2, U_3 reprezentující úpravy u_1, u_2, u_3 tak, že $B = U_3 \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A$.

Řešení

Nejprve dané úpravy proveďme a spočítejme matici B.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +4r_1 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Hledejme matice U_1, U_2, U_3 odpovídající provedeným úpravám, které vzniknou pouze mírnou obměnou jednotkové matice E_3.

- Úpravou u_1 jsme dosáhli výměny 1. a 2. řádku matice A. V jednotkové matici stačí prohodit příslušné řádky, tj.

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Raději to ověřme provedením součinu

$$U_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  což skutečně je matice vzniklá pomocí úpravy u_1 matice A.

- Další úpravou u_2 bylo přičtení 4-násobku 1. řádku k 2. řádku matice, což jsme provedli na matici $U_1 \cdot A$. Jelikož změna probíhá ve 2. řádku, modifikujeme pouze 2. řádek jednotkové matice, ostatní ponecháme, jak jsou. Přičítáme 4-násobek 1. řádku, takže do 1. sloupce 2. řádku jednotkové matice vložíme 4:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Opět ověříme provedením součinu

$$U_2 \cdot (U_1 \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  což skutečně je matice vzniklá po úpravách u_1 a následně u_2 (viz výpočet matice B).

- Poslední úpravou u_3 bylo vynásobení 3. řádku číslem 2, ovšem u matice $U_2 \cdot (U_1 \cdot A)$. Jelikož změna nastane ve 3. řádku, změníme pouze 3. řádek jednotkové matice, a to tím způsobem, že jeho prvek na hlavní diagonále přepíšeme z 1 na 2:

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Znovu ověříme provedením součinu

$$U_3 \cdot [U_2 \cdot (U_1 \cdot A)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

  což skutečně je matice B postupně vzniklá pomocí úprav u_1, u_2 a u_3.

Řešený příklad 5.3.b

Zadání

S maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

proveďte následující tři úpravy

- u_1: výměna 1. a 3. řádku,
- u_2: přičtení -2-násobku 1. řádku k 3. řádku,
- u_3: vynásobení 2. řádku číslem -1,

a určete matici B, která pomocí výše uvedených úprav matice A vznikla. Následně nalezněte matice U_1, U_2, U_3 reprezentující úpravy u_1, u_2, u_3 tak, že $B = U_3 \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A$.

Řešení

Nejprve dané úpravy proveďme a spočítejme matici B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = B$$

Hledejme matice U_1, U_2, U_3 odpovídající provedeným úpravám, které vzniknou pouze mírnou obměnou jednotkové matice E_3. Narozdíl od předchozího řešeného příkladu u nalezených matic nebudeme ověřovat, zda skutečně reprezentují danou úpravu. Zkuste si to sami, klidně využijte nástrojů, které nabízí internet (např. Geogebra 3D grafy na stránce `https://www.geogebra.org/3d?lang=cs` či Kalkulačka matic na stránce `https://matrixcalc.org/cs/`).

- Úpravou u_1 jsme dosáhli výměny 1. a 3. řádku matice A. V jednotkové matici stačí prohodit příslušné řádky, tj.

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Další úpravou u_2 bylo přičtení -2-násobku 1. řádku k 3. řádku matice, což jsme provedli na matici $U_1 \cdot A$. Jelikož změna probíhá ve 3. řádku, modifikujeme pouze 3. řádek jednotkové matice, ostatní ponecháme, jak jsou. Přičítáme -2-násobek 1. řádku, takže do 1. sloupce 3. řádku jednotkové matice vložíme -2:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Poslední úpravou u_3 bylo vynásobení 2. řádku číslem -1, ovšem u matice $U_2 \cdot (U_1 \cdot A)$. Jelikož změna nastane ve 2. řádku, změníme pouze 2. řádek jednotkové matice, a to tím způsobem, že jeho prvek na hlavní diagonále přepíšeme z 1 na -1:

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5.3.c (pouze s výsledkem)

Zadání
S maticí

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

proveďte následující tři úpravy

- u_1: výměna 1. a 3. řádku,
- u_2: přičtení 3-násobku 1. řádku k 3. řádku,
- u_3: vynásobení 2. řádku číslem -2,

a určete matici B, která pomocí výše uvedených úprav matice A vznikla. Následně nalezněte matice U_1, U_2, U_3 reprezentující úpravy u_1, u_2, u_3 tak, že $B = U_3 \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A$.

Příklad 5.3.d (pouze s výsledkem)

Zadání
S maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

proveďte následující tři úpravy

- u_1: přičtení 5-násobku 2. řádku k 3. řádku,
- u_2: výměna 1. a 2. řádku,
- u_3: vynásobení 2. řádku číslem 2,

a určete matici B, která pomocí výše uvedených úprav matice A vznikla. Následně nalezněte matice U_1, U_2, U_3 reprezentující úpravy u_1, u_2, u_3 tak, že $B = U_3 \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A$.

Výsledky příkladů

5.1.c:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.1.d:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -9 & 9 & 13 \\ -1 & -7 & 17 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 8 & 1 & 3 & -8 \\ -13 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

5.2.c:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -6 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5.2.d:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3.c:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3.d:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$