MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 6

Známe již Gaussovu eliminační metodu a Cramerovo pravidlo pro řešení systému lineárních rovnic. V 6. cvičení si uvedeme další tři metody, které jsou ve *Skriptech* představeny v rámci kapitol (týdnů) 5, 6.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

6.1 Maticová metoda řešení SLR

V minulém cvičení jsme si představili inverzní matice, které se v maticové metodě používají k řešení SLR. Je tedy patrné, že tento postup můžeme použít pouze tehdy, máme-li SLR, v němž je stejný počet řádků jako proměnných a navíc je matice systému A regulární. V takovém případě lze určit inverzní matici A^{-1}. Ve *Skriptech* (viz str. 55) je poté z obecného zápisu SLR

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

odvozena jiná rovnice

$$(*) \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b},$$

kterou pro nalezení řešení SLR použijeme. Je tedy patrné, že největší práci budeme mít s nalezením inverzní matice, kterou poté už jen vynásobíme s vektorem pravých stran $\vec{b}$ a dostaneme řešení.

Řešený příklad 6.1.a

Zadání
Pomocí maticové metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Řešení
Nejprve k matici systému

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nalezneme pomocí Gauss-Jordanovy metody inverzní matici:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_3 \\ -r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

V poslední rozšířené matici už je nalevo jednotková matice, takže napravo máme inverzní matici A^{-1}. Je tedy možné ji použít a dle vzorce (*) spočítat řešení systému:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

tedy

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Řešený příklad 6.1.b

Zadání

Pomocí maticové metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & & & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

Řešení

Opět nejprve nalezneme inverzní matici A^{-1} k matici systému A pomocí Gauss-Jordanovy metody:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \color{red}{\mathbf{-1}} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{2}} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2r_2 - r_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{2}} & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ :2 \\ :2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

V poslední rozšířené matici už je nalevo jednotková matice, takže napravo máme inverzní matici A^{-1}. Je tedy možné ji použít a dle vzorce (*) spočítat řešení systému:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Příklad 6.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání

Pomocí maticové metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 2 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & & & = & 0 \end{array}$$

Příklad 6.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Pomocí maticové metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -4x & - & y & + & 6z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2x & & & + & 3z & = & -1 \end{array}$$

6.2 Gauss-Jordanova metoda pro řešení SLR

Gauss-Jordanovu metodu již známe, protože pomocí ní hledáme inverzní matice. Lze ji však použít i jiným způsobem, totiž k přímému nalezení řešení, opět však za předpokladu, že matice systému je čtvercová a regulární. Podrobněji je tato metoda popsána ve *Skriptech* na str. 66–67.

Řešený příklad 6.2.a

Zadání
Pomocí Gauss-Jordanovy metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{array}$$

Řešení
Systém si zapíšeme do rozšířené matice a následně se pomocí elementárních řádkových uprav snažíme převést matici nalevo na jednotkovou.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{1}} & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 6 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -5r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :31 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{-1}} & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2r_3 \\ +6r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2r_2 \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Jakmile máme nalevo jednotkovou matici, tak na pravé straně rozšířené matice je řešení systému, tedy

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Řešený příklad 6.2.b

Zadání
Pomocí Gauss-Jordanovy metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0, \\ 7x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -16, \\ -5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 10, \end{array}$$

Řešení
Systém si zapíšeme do rozšířené matice a následně se pomocí elementárních řádkových uprav snažíme převést matici nalevo na jednotkovou.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & 5 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & -16 \\ -5 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2r_1 + r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 11 & -16 \\ 7 & -3 & 1 & -16 \\ -5 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -7r_1 \\ +5r_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 11 & -16 \\ 0 & -10 & -76 & 96 \\ 0 & 7 & 56 & -70 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 11 & -16 \\ 0 & -3 & -20 & 26 \\ 0 & 7 & 56 & -70 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2r_2 + r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 11 & -16 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 16 & -18 \\ 0 & 7 & 56 & -70 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -7r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 11 & -16 \\ 0 & 1 & 16 & -18 \\ 0 & 0 & -56 & 56 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :(-56) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 11 & -16 \\ 0 & 1 & 16 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -11r_3 \\ -16r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Nalevo již máme jednotkovou matici, takže na pravé straně poslední rozšířené matice je řešení systému, tj.

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Příklad 6.2.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Pomocí Gauss-Jordanovy metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -15 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

Příklad 6.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Pomocí Gauss-Jordanovy metody nalezněte řešení následujícího systému:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & -6 \end{array}$$

6.3 Princip superpozice

Poslední metodou řešení SLR, kterou si ukážeme, je Princip superpozice. Abyste pochopili fungování této metody, je třeba znát pojmy **nehomogenní** vs. **homogenní** SLR, tj. systém s libovolnou pravou stranou, resp. systém s pravou stranou v podobě samých nul. Řešení nehomogenního systému se složí z obecného řešení homogenního SLR a partikulárního řešení nehomogenního SLR. Podrobněji viz *Skripta* a Věty 9, 10, Definice 18 a Příklady 22, 23 a 24 na str. 50–55.

Řešený příklad 6.3.a

Zadání

Pomocí principu superpozice vyřešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & & & - & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 3 \end{array}$$

Řešení

Nejprve si zadaný systém převedeme do rozšířené matice, kterou převedeme na schodový tvar. Zjistíme tak počet řešení.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4r_1 \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 8 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \\ -2r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{škrtni} \\ \text{škrtni} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Po převedení na schodový tvar zůstaly dva nenulové řádky. Vzhledem k počtu proměnných má tedy systém nekonečně mnoho řešení, které zapíšeme pomocí $4 - 2 = 2$ parametrů.

Princip superpozice

1. Spočítejme nejdříve řešení **homogenního SLR**, tj. na pravou stranu dvou nenulových řádků vložme nuly:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

   Zpětným chodem dostáváme:

   - Druhý řádek je symbolickým zápisem rovnice $-x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0$. Zvolme parametry $x_3 = s, x_4 = t$ a dosaďme je do předchozí rovnice:
$$-x_2 - 3s + 4t = 0 \iff x_2 = -3s + 4t$$

- První řádek si zapíšeme jako rovnici $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ a dosadíme do ní oba parametry i vyjádření proměnné x_2:

$$x_1+2\cdot(-3s+4t)+s-t = 0 \iff x_1-6s+8t+s-t = 0 \iff x_1 = 5s-7t$$

Zapíšeme řešení homogenního SLR, přičemž od sebe oddělíme oba parametry:

$$K_{\text{hom}} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Nyní se pokusíme uhodnout nějaké **partikulární řešení nehomogenního SLR**, který jsme si převodem na schodový tvar zredukovali na dva lineárně nezávislé řádky:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \end{array}$$

Protože máme 4 proměnné a už pouze dva řádky, můžeme například x_3, x_4 položit rovny nule, čímž získáme tento jednoduchý systém:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ & & -x_2 & = & 1 \end{array}$$

Z druhého řádku je patrná hodnota $x_2 = -1$, kterou dosadíme do prvního řádku a získáváme $x_1 = 3$. Našli jsme tedy partikulární řešení

$$K_{\text{part.nehom}} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Spojíme nyní vypočítané partikulární řešení nehomogenního SLR $K_{\text{part.nehom}}$ a obecné řešení homogenního SLR K_{hom}, čímž dostaneme **obecné řešení nehomogenního SLR**:

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Řešený příklad 6.3.b

Zadání

Pomocí principu superpozice vyřešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 10x_4 & = & -2 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 6x_4 & = & 2 \end{array}$$

Řešení

Nejprve si zadaný systém převedeme do rozšířené matice, kterou převedeme na schodový tvar. Zjistíme tak počet řešení.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -7r_1 \\ -r_1 \\ +2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \text{škrtni} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -5r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Po převedení na schodový tvar zůstaly tři nenulové řádky. Vzhledem k počtu proměnných má tedy systém nekonečně mnoho řešení, které zapíšeme pomocí $4 - 3 = 1$ parametru.

Princip superpozice

1. Nejdříve nalezneme řešení **homogenního SLR**, tj. na pravou stranu tří nenulových řádků vložme nuly:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Zpětným chodem dostáváme:

- Poslední řádek je symbolickým zápisem rovnice $x_3 + 2x_4 = 0$. Zvolme parametr $x_4 = t$ a dosaďme jej do předchozí rovnice:

$$x_3 + 2t = 0 \iff x_3 = -2t$$

- Prostřední řádek si zapíšeme jako rovnici $x_2 - x_3 + x_4 = 0$ a dosadíme do ní vyjádření proměnných x_3, x_4:

$$x_2 - (-2t) + t = 0 \iff x_2 = -3t$$

- Horní řádek znamená rovnici $x_1 - x_2 - 3x_4 = 0$, do níž si dosadíme vyjádření proměnných x_2, x_4:

$$x_1 - (-3t) - 3t = 0 \iff x_1 = 0$$

Zapíšeme řešení homogenního SLR:

$$K_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Nyní se pokusíme uhodnout nějaké **partikulární řešení nehomogenního SLR**, který jsme si převodem na schodový tvar zredukovali na tři lineárně nezávislé řádky:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

Protože máme 4 proměnné a tři řádky, můžeme například x_4 položit rovno nule, čímž získáme tento zjednodušený systém:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ & & & & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Z třetího řádku je patrná hodnota $x_3 = 5$, kterou dosadíme do druhého řádku a získáváme $x_2 = 3$. Díky tomu získáme i hodnotu x_1 na prvním řádku, když do rovnice $x_1 - x_2 = -1$ dosadíme $x_2 = 3$ a stanovíme $x_1 = 2$. Našli jsme partikulární řešení nehomogenního systému

$$K_{\text{part.nehom}} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Spojíme nyní partikulární řešení nehomogenního SLR $K_{\text{part.nehom}}$ a obecné řešení homogenního SLR K_{hom}, čímž dostaneme **obecné řešení nehomogenního SLR**:

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Poznámka: Ve *Skriptech* na str. 55 hodnotí dr. Fajmon princip superpozice jako metodu řešení SLR výhodnou zejména tehdy, má-li systém nekonečně mnoho řešení. Proto je důležité si rozšířenou matici SLR převést na schodový tvar a teprve poté využít princip superpozice, který může být méně náročný na počítání v porovnání s Gaussovou eliminační metodou.

Příklad 6.3.c (pouze s výsledkem)

Zadání

Pomocí principu superpozice vyřešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & + & 4x_5 & = & -2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & + & 6x_5 & = & -3 \end{array}$$

Příklad 6.3.d (pouze s výsledkem)

Zadání

Pomocí principu superpozice vyřešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -1 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & -7 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky příkladů

6.1.c: $K = \{(1; 1; 0)^T\}$, 6.1.d: $K = \{(8; -3; 5)^T\}$
6.2.c: $K = \{(2; 1; -2)^T\}$, 6.1.d: $K = \{(2; 0; 1)^T\}$
6.3.c: např.

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6.3.d: např.

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$