MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 7

V tomto cvičení se seznámíme s **lineárním zobrazením** mezi dvěma vektorovými prostory. Ukážeme si, jak se dá zadat, a představíme si jeho základní charakteristiky, totiž jádro a obor lineárního zobrazení. Ve *Skriptech* je tomuto tématu věnována 7. kapitola (Týden 7) na str. 69–81.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU · Národní plán obnovy · Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

7.1 Zadání lineárního zobrazení

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ mezi vektorovými prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ lze zadat třemi způsoby:

- pomocí předpisu mezi souřadnicemi vektoru $\vec{u} \in V$ a $\varphi(\vec{u}) \in V'$,
- pomocí matice A typu $m \times n$ takové, že $\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$,
- pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \ldots, \varphi(\vec{e_n})$ bázových vektorů prostoru V.

Ve *Skriptech* na str. 71–73 jsou tyto tři způsoby vysvětleny a znázorněny na konkrétních příkladech 28, 29. V následujících řešených příkladech si ukážeme, jak mezi těmito způsoby „převádět“, tj. z jedné formy zadání dostat další.

Řešený příklad 7.1.a

Zadání

Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zadáno předpisem

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + 2z \\ 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

Sestavte matici A zobrazení φ. Poté určete obraz vektoru $\vec{u} = (1; 2; 3)^T$ v zobrazení φ. Na závěr nalezněte v souřadnicové rovině ϱ_{xz} vektor $\vec{v}$, který se prostřednictvím φ zobrazí na vektor $(-3; 3)^T$.

Řešení

Lineární zobrazení φ zobrazuje třísložkový vektor $\vec{u}$ $(n = 3)$ na dvousložkový vektor $\varphi(\vec{u})$ $(m = 2)$. Aby mohlo být uskutečněno násobení $A_\varphi \cdot \vec{u}$, musí mít matice A_φ tři sloupce. Aby výsledkem násobení $A_\varphi \cdot \vec{u}$ byl dvousložkový vektor, musí mít matice A_φ dva řádky. Je tedy A_φ typu 2×3 (tedy $m \times n$). Na pravé straně předpisu jsou dva výrazy. Každý odpovídá jednomu řádku matice, do jehož prvků postupně vložíme koeficienty u proměnných x, y, z:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dalším úkolem bylo určit obraz $\varphi(\vec{u})$ zadaného vektoru $\vec{u}$. Můžeme k tomu použít i předpis, my však zkusíme zobrazit vektor $\vec{u}$ pomocí matice A_φ:

$$\varphi(\vec{u}) = A_\varphi \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Nakonec hledáme vzor $\vec{v}$ vektoru $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Protože $\vec{v}$ leží v souřadnicové rovině ϱ_{xz}, je jeho prostřední souřadnice nulová, tj.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Dále by dle předpisu zobrazení φ mělo platit

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+2z \\ 2y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Protože $y = 0$, dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & 2z & = & -3 \\ & & -3z & = & 3 \end{array}$$

Je tedy $z = -1$, z čehož po dosazení do první rovnice a drobných úpravách

$$\begin{array}{rcl} -x + 2\cdot(-1) & = & -3 \\ -x - 2 & = & -3 \\ -x & = & -1 \\ x & = & 1 \end{array}$$

získáme zbývající 1. souřadnici vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Řešený příklad 7.1.b

Zadání

Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno maticí zobrazení A_φ

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nalezněte předpis zobrazení φ. Poté určete obraz vektoru $\vec{u} = (1; -1)^T$ v zobrazení φ. Na závěr nalezněte vektor $\vec{v}$, který se prostřednictvím φ zobrazí na vektor $(5; 4; -3)^T$.

Řešení

Lineární zobrazení φ zobrazuje dvousložkový vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

na vektor $\varphi(\vec{u})$, který pomocí matice A_φ rozepíšeme takto:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\varphi \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3y \\ 2x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$$

Spojíme-li levou a pravou stranu předchozí rovnice, dostáváme předpis lineárního zobrazení φ:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3y \\ 2x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$$

Dalším úkolem bylo určit obraz $\varphi(\vec{u})$ zadaného vektoru $\vec{u}$. Zobrazíme vektor $\vec{u}$ pomocí matice A_φ:

$$\varphi(\vec{u}) = A_\varphi \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nakonec hledáme vzor $\vec{v}$ vektoru $\varphi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dle předpisu zobrazení φ by mělo platit

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tři rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & 3y & = & 5 \\ 2x & + & y & = & 4 \\ x & - & 2y & = & -3 \end{array}$$

Tento systém převedeme do rozšířené matice a pomocí Gaussovy eliminační metody spočítáme řešení:

$$\left(\begin{array}{rr|r} \color{red}{\mathbf{-1}} & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & 5 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 2 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -7r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ \color{green}{\mathbf{0}} & \color{green}{\mathbf{0}} & \color{green}{\mathbf{0}} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{škrtni} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Z druhého řádku poslední rovnice je patrné, že $y = 2$. Dosadíme tuto hodnotu do prvního řádku a dostáváme:

$$-x + 3 \cdot 2 = 5 \iff -x = -1 \iff x = 1$$

Vzor vektoru $\varphi(\vec{v})$ je tedy vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Řešený příklad 7.1.c

Zadání

Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zadáno obrazy bázových vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Sestavte matici A_φ zobrazení φ vzhledem ke standardní bázi.

Řešení

Lineární zobrazení φ zobrazuje trísložkový vektor $\vec{u}$ ($n = 3$) na dvousložkový vektor $\varphi(\vec{u})$ ($m = 2$). Aby mohlo být uskutečněno násobení $A_\varphi \cdot \vec{u}$, musí mít matice A_φ tři sloupce. Aby výsledkem násobení $A_\varphi \cdot \vec{u}$ byl dvousložkový vektor, musí mít matice A_φ dva řádky. Je tedy A_φ typu 2×3 (tedy $m \times n$), přičemž její prvky zatím neznáme:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Pomocí této matice však zobrazujeme i bázové vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, u nichž známe jejich obrazy. Platí tedy

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{e_1}) &= A_\varphi \cdot \vec{e_1}, \quad \text{tedy} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\varphi(\vec{e_2}) &= A_\varphi \cdot \vec{e_2}, \quad \text{tedy} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\varphi(\vec{e_3}) &= A_\varphi \cdot \vec{e_3}, \quad \text{tedy} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Když provedem součin na levé straně tří předchozích rovnic, dostáváme těchto šest jednoduchých vztahů:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
 & & y_1 & + & 2z_1 & = & 5 \\
 & & y_2 & + & 2z_2 & = & -4 \\
-4x_1 & + & 3y_1 & & & = & 7 \\
-4x_2 & + & 3y_2 & & & = & 6 \\
x_1 & + & 2y_1 & + & 3z_1 & = & 7 \\
x_2 & + & 2y_2 & + & 3z_2 & = & -5
\end{array}$$

Dejme zvlášť do jedné rozšířené matice rovnice s neznámými x_1, y_1, z_1 a do druhé rozšířené matice rovnice s neznámými x_2, y_2, z_2:

$$\text{Pro } x_1, y_1, z_1 : \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right), \qquad \text{resp. pro } x_2, y_2, z_2 : \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

Všimněte si, že první tři sloupce obou rozšířených matic jsou stejné. Je tedy možné sloučit obě rozšířené matice dohromady a počítat řešení obou systémů současně:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 7 & -5 \\ -4 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right) +4r_1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 11 & 12 & 35 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 11 & 12 & 35 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -11r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -20 & 30 \end{array}\right) : (-10) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Při zpětném chodu bereme 4. sloupec jako pravou stranu rovnic pro neznámé x_1, y_1, z_1, zatímco 5. sloupec je pravá strana rovnic pro neznámé x_2, y_2, z_2:

- poslední řádek rozšířené matice znamená tyto rovnosti: $z_1 = 2$, resp. $z_2 = -3$.
- Prostřední řádek matice představuje tyto dvě rovnice: $y_1 + 2z_1 = 5$, resp. $y_2 + 2z_2 = -4$. Dosazením $z_1 = 2$, resp. $z_2 = -3$ dostáváme:

$$y_1 + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow y_1 = 1, \qquad \text{resp. } y_2 + 2 \cdot (-3) = -4 \Rightarrow y_2 = 2.$$

- První řádek matice představuje tyto dvě rovnice: $x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 7$, resp. $x_2 + 2y_2 + 3z_2 = -5$. Dosazením všech již vypočítaných hodnot dostáváme:

$$x_1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7 \Rightarrow x_1 = -1, \qquad \text{resp. } x_1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -5 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Hledanou maticí zobrazení φ je tedy

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 7.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno předpisem

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + 3y \\ x - 4y \end{pmatrix}.$$

Sestavte matici A zobrazení φ. Poté určete obraz vektoru $\vec{u} = (1; 1)^T$ v zobrazení φ. Na závěr určete vektor $\vec{v}$, který se prostřednictvím φ zobrazí na vektor $(0; -1; -2)^T$.

Příklad 7.1.e (pouze s výsledkem)

Zadání
Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zadáno maticí zobrazení A_φ

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Nalezněte předpis zobrazení φ. Poté určete obraz vektoru $\vec{u} = (1; 2; 3)^T$ v zobrazení φ. Na závěr nalezněte v souřadnicové rovině ϱ_{xz} vektor $\vec{v}$, který se prostřednictvím φ zobrazí na vektor $(0; 1)^T$.

Příklad 7.1.f (pouze s výsledkem)

Zadání
Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno obrazy bázových vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}$:

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sestavte matici A_φ zobrazení φ vzhledem ke standardní bázi.

7.2 Lineární transformace přímky a roviny

Ve *Skriptech* a kapitole 7 je na stránkách 73–77 uvedeno několik základních lineárních transformací[1] prostoru $\mathbb{R}^2$ (identita, projekce na osu x, y, otočení o úhel atd.). V této části si ukážeme, jak se dá spočítat obraz přímky či roviny v lineární transformaci prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešený příklad 7.2.a

Zadání
Pomocí matice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

je dána lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zjistěte, na jakou množinu bodů se přímka p zobrazí pomocí φ, je-li

$$p = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Řešení
Stačí převést zadanou přímku do sloupcového vektoru a následně provést násobení maticí A_φ zleva:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ 1+2t \\ -1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t + 2\cdot(1+2t) + (-1+t) \\ -t + 0\cdot(1+2t) + 2\cdot(-1+t) \\ -t + 2\cdot(1+2t) - 3\cdot(-1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -2+t \\ 5 \end{pmatrix}$$

Přímka p se tedy zobrazí na přímku

$$\varphi(p) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

[1] Lineární transformace je lineární zobrazení $\varphi : V \to V$, které zobrazuje vektorový prostor V sám na sebe.

Řešený příklad 7.2.b

Zadání
Pomocí matice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

je dána lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zjistěte, na jakou množinu bodů se rovina r zobrazí pomocí φ, je-li zadána pomocí obecné rovnice $r : x - 2y + 3z - 4 = 0$.

Řešení
Nejprve je třeba získat z obecné rovnice roviny r její parametrické vyjádření, tj. najít bod a dva směrové vektory, které určují rovinu r. Zkusme najít tři různé body ležící v rovině r:

- Položíme-li $x = z = 0$, dostáváme po dosazení do obecné rovnice $-2y - 4 = 0$, z čehož $y = -2$. Máme tedy první bod roviny

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- V případě $y = z = 0$ je $x - 4 = 0$, tedy $x = 4$. Druhý bod roviny je

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Je-li $x = z = 1$, pak po dosazení do obecné rovnice máme vztah $1 - 2y + 3 - 4 = 0$, tj. $-2y = 0$, z čehož $y = 0$. Třetí bod roviny je

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oba směrové vektory nyní určíme ze získaných bodů, např.

$$\vec{r_1} = \vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r_2} = \vec{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parametrické vyjádření roviny r s využitím bodu A a vektorů r_1, r_2 je

$$r = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Převedeme parametrické vyjádření roviny r do sloupcového vektoru a následně vynásobíme maticí A_φ zleva:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4s+t \\ -2+2s+2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(4s+t)+2\cdot(-2+2s+2t)+t \\ 4s+t+0\cdot(-2+2s+2t)+2t \\ 4s+t+2\cdot(-2+2s+2t)-3t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4+16s+8t \\ 4s+3t \\ -4+8s+2t \end{pmatrix}$$

Rovina r se tedy zobrazí na rovinu

$$\varphi(r) = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Příklad 7.2.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Pomocí matice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je dána lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zjistěte, na jakou množinu bodů se přímka p zobrazí pomocí φ, je-li

$$p = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Příklad 7.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Pomocí matice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je dána lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zjistěte, na jakou množinu bodů se rovina r zobrazí pomocí φ, je-li zadána pomocí obecné rovnice
$r : x - y - z + 2 = 0$.

7.3 Jádro a obraz lineárního zobrazení

V následujících příkladech se zaměříme na dvě základní charakteristiky lineárního zobrazení $\varphi : V \to V'$:

- jádro $\operatorname{Ker} \varphi$ (množina vektorů $\vec{u} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor V') a
- obor hodnot $\operatorname{Im} \varphi$ (množina vektorů $v \in V'$, které mají nějaký vzor při zobrazení φ).

Jedná se o vektorové podprostory, pro jejichž dimenze platí

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(V).$$

Je-li zobrazení φ zadáno maticí A_φ, pak $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = h(A_\varphi)$, z čehož vyplývá $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim(V) - h(A_\varphi)$. Tak zvaný *defekt* lineárního zobrazení, tj. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi)$ tedy určuje, o kolik dimenzí lineárním zobrazením „přijdeme". Podrobněji se o těchto pojmech dozvíte ve *Skriptech* na str. 77–80.

Řešený příklad 7.3.a

Zadání[2]
Lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je zadáno maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra $\operatorname{Ker}\psi$ a oboru hodnot $\operatorname{Im}\psi$.

Řešení
Spočítejme si nejdříve hodnost $h(B)$, abychom zjistili dimenzi oboru hodnot $\operatorname{Im}\psi$:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Po převodu na schodový tvar zůstaly tři nenulové vektory, což znamená $h(B) = 3 = \dim(\operatorname{Im}\psi)$, z čehož vzhledem k dimenzi vstupního prostoru $\mathbb{R}^3$ znamená, že $\dim(\operatorname{Ker}\psi) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Im}\psi) = 3 - 3 = 0$.

Sice už je ze spočítané dimenze jádra patrné, že $\operatorname{Ker}\psi = \{\vec{o}\}$, ale pojďme si to potvrdit výpočtem. Pro vektory $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\psi$ lineárního zobrazení by měl platit vztah $\psi(\vec{u}) = \vec{o}$, což lze pomocí matice B přepsat takto:

$$\psi(\vec{u}) = B \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tak homogenní systém, jehož převod na schodový tvar už jsme provedli na začátku, když jsme počítali hodnost matice B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Zpětným chodem zjišťujeme:

[2] Úloha 8.2 ze *Skript* na str. 89

- Poslední řádek systému je rovnice $5 \cdot u_3 = 0$, z čehož $u_3 = 0$.
- Prostředním řádkem je zapsána rovnice $u_2 + 2u_3 = 0$, do níž dosadíme spočítanou hodnotu u_3 a získáváme $u_2 = 0$.
- Z prvního řádku rovnou dostáváme $u_1 = 0$.

Je tedy potvrzeno, že $\operatorname{Ker}\psi = \{\vec{o}\}$.

Báze oboru hodnot $\operatorname{Im}\psi$ by měla obsahovat 3 vektory z $\mathbb{R}^4$. Získáme je jednoduše tak, že pomocí matice B zobrazíme vektory standardní báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Zjistíme, že

$$\psi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\ \psi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \psi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Měli bychom ověřit, zda jsou spočítané vektory lineárně nezávislé. Není to však potřeba, jelikož jde o sloupce matice B, u níž jsme spočítali $h(B) = 3$. Protože platí $h(B^T) = h(B)$, jsou spočítané čtyřsložkové vektory lineárně nezávislé a můžeme psát:

$$\operatorname{Im}\psi = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\\1\end{pmatrix}\right).$$

Řešený příklad 7.3.b

Zadání[3]

Lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno maticí

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\-1 & 0 & 1 & -1\\2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra $\operatorname{Ker}\psi$ a oboru hodnot $\operatorname{Im}\psi$.

Řešení

Začneme opět tím, že určíme hodnost matice B, čímž zjistíme více věcí najednou: $\dim(\operatorname{Im}\psi)$, následně $\dim(\operatorname{Ker}\psi)$ a také si připravíme 1. část výpočtu báze jádra $\operatorname{Ker}\psi$.

$$\begin{pmatrix}\color{red}{1} & 1 & 0 & 2\\-1 & 0 & 1 & -1\\2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\+r_1\\-2r_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Okamžitě můžeme vyvodit: $\dim(\operatorname{Im}\psi) = h(B) = 3$, z čehož zároveň vyplývá $\dim(\operatorname{Ker}\psi) = \dim(\mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{Im}\psi) = 4 - 3 = 1$.

Báze jádra by tedy měla obsahovat jeden vektor, který určíme řešením homogenního systému $\psi(\vec{u}) = B \cdot \vec{u} = \vec{o}$. Díky tomu, že jsme matici B už

[3] Úloha 8.4 ze *Skript* na str. 90

převedli na schodový tvar, máme první část řešení homogenního systému již hotovou:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Protože máme tři lineárně nezávislé řádky na čtyři proměnné (tj. souřadnice čtyřsložkového vektoru $\vec{u}$), je třeba zavést $4 - 3 = 1$ parametr. Zvolme tedy např. $u_3 = t, t \in \mathbb{R}$. Zpětným chodem zjistíme zbylé složky vektoru $\vec{u}$:

- Poslední řádek reprezentuje rovnici $4u_3 - u_4 = 0$. Po dosazení $u_3 = t$ dostáváme $u_4 = 4t$.
- Prostřední řádek zapíšeme jako rovnici $u_2 + u_3 + u_4 = 0$. Po dosazení hodnot u_3, u_4 je jasné, že $u_2 = -5t$.
- Prvním řádkem rozumíme rovnici $u_1 + u_2 + 2u_4 = 0$. Opět dosadíme za u_2, u_4 a máme $u_1 = -3t$.

Řešení systému je tedy množina vektorů

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ z čeho vyplývá } \operatorname{Ker} \psi = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Báze oboru hodnot $\operatorname{Im} \psi$ by měla obsahovat 3 vektory z $\mathbb{R}^3$. Získáme je tak, že pomocí matice B zobrazíme libovolné tři ze čtyř vektorů standardní báze prostoru $\mathbb{R}^4$. Zjistíme, že

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ověříme, zda jsou spočítané vektory (první tři sloupce matice B) lineárně nezávislé. Vložíme je do matice (je jedno, jestli do řádků či sloupců) a zjistíme její hodnost.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je 3, tudíž jsou vložené vektory lineárně nezávislé. Můžeme je tedy použít jako generátory podprostoru $\operatorname{Im} \psi$:

$$\operatorname{Im} \psi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Řešený příklad 7.3.c

Zadání[4]
Pro lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je

$$\operatorname{Ker}\psi = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \operatorname{Im}\psi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.

Řešení
Protože ψ zobrazuje vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ obsahující třísložkové vektory, musí mít matice A_ψ tři sloupce. Jen v takovém případě bude fungovat zobrazování $\psi(\vec{u}) = A_\psi \cdot \vec{u}$, kde $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

Má-li být výsledkem zobrazení ψ čtyřsložkový vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$, musí mít matice A_ψ čtyři řádky. Matice A_ψ je tedy typu 4×3.

Jeden z jejích vektorů, například ten první, je vektor, který generuje obor hodnot $\operatorname{Im}\psi$. Můžeme tedy napsat, že

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \\ 1 & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

V jádru zobrazení $\operatorname{Ker}\psi$ jsou dva vektory, které by matice A_ψ měla zobrazovat na nulový vektor. Platí tedy

$$\psi\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \\ 1 & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \\ 1 & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozepíšeme-li si oba vztahy napravo do rovnic, dostáváme:

$$\begin{aligned} 2 + 2a_{12} + a_{13} &= 0, & 1 + 0 \cdot a_{12} + a_{13} &= 0 \\ 0 + 2a_{22} + a_{23} &= 0, & 0 + 0 \cdot a_{22} + a_{23} &= 0 \\ 2 + 2a_{32} + a_{33} &= 0, & 1 + 0 \cdot a_{32} + a_{33} &= 0 \\ 2 + 2a_{42} + a_{43} &= 0, & 1 + 0 \cdot a_{42} + a_{43} &= 0 \end{aligned}$$

V každé dvojici rovnic lze jednu z proměnných přímo vyjádřit z druhé rovnice a následně dosadit do první:

[4] Úloha 8.6 ze *Skript* na str. 90

1. $a_{13} = -1$, z čehož $2 + 2a_{12} - 1 = 0$, a tedy $2a_{12} = -1 \Rightarrow a_{12} = -\frac{1}{2}$,
2. $a_{23} = 0$, z čehož $0 + 2a_{22} + 0 = 0$, a tedy $a_{22} = 0$,
3. $a_{33} = -1$, z čehož $2 + 2a_{32} - 1 = 0$, a tedy $2a_{32} = -1 \Rightarrow a_{32} = -\frac{1}{2}$,
4. $a_{43} = -1$, z čehož $2 + 2a_{42} - 1 = 0$, a tedy $2a_{42} = -1 \Rightarrow a_{42} = -\frac{1}{2}$.

Máme zjištěny všechny zbývající prvky matice lineárního zobrazení ψ a můžeme psát výsledek:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešený příklad 7.3.d

Zadání
Pro lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je

$$\operatorname{Ker}\psi = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \operatorname{Im}\psi = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.

Řešení
Vzhledem k dimenzi vstupního a výstupního prostoru zobrazení ψ bude matice A_ψ typu 3×4. Jeden z jejích sloupců můžeme snadno stanovit, jde o vektor generující obor hodnot $\operatorname{Im}\psi$. Dejme jej do 1. sloupce matice A_ψ, zbylé sloupce musíme dopočítat:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

V jádru zobrazení $\operatorname{Ker}\psi$ jsou tři vektory, které by matice A_ψ měla zobrazovat na nulový vektor. Platí tedy

$$\psi\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=A_\psi\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ -2 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=A_\psi\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ -2 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}=A_\psi\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ -2 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Rozepíšeme-li si všechny tři vztahy napravo do rovnic, dostáváme:

$$\begin{aligned} -2+a_{12}+a_{13}&=0 & -4+a_{22}+a_{23}&=0 & 2+a_{32}+a_{33}&=0\\ -3+a_{13}&=0 & -6+a_{23}&=0 & 3+a_{33}&=0\\ 2+a_{14}&=0 & 4+a_{24}&=0 & -2+a_{34}&=0 \end{aligned}$$

Snadno nyní dopočítáme hodnoty prvků 3. až 4. sloupce matice A_ψ, které následně dosadíme do rovnic, kde se vyskytují prvky 2. sloupce. Výsledkem je matice

$$A_\psi=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 6 & -4\\ 1 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Příklad 7.3.e (pouze s výsledkem)

Zadání

Lineární zobrazení $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ je zadáno maticí

$$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra $\operatorname{Ker}\psi$ a oboru hodnot $\operatorname{Im}\psi$.

Příklad 7.3.f (pouze s výsledkem)

Zadání

Lineární zobrazení $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je zadáno maticí

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra $\operatorname{Ker}\psi$ a oboru hodnot $\operatorname{Im}\psi$.

Příklad 7.3.g (pouze s výsledkem)

Zadání

Pro lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je

$$\operatorname{Ker}\psi = \left(\left(\begin{array}{c}4\\1\\1\\0\end{array}\right), \left(\begin{array}{c}2\\1\\0\\1\end{array}\right)\right), \quad \operatorname{Im}\psi = \left(\left(\begin{array}{r}-1\\-2\\-1\end{array}\right), \left(\begin{array}{c}4\\5\\1\end{array}\right)\right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.

Příklad 7.3.h (pouze s výsledkem)

Zadání

Pro lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je

$$\operatorname{Ker}\psi = \left(\left(\begin{array}{r}-1\\1\\1\end{array}\right)\right), \quad \operatorname{Im}\psi = \left(\left(\begin{array}{r}2\\1\\-1\\0\end{array}\right), \left(\begin{array}{r}4\\3\\-1\\-2\end{array}\right)\right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.

Výsledky příkladů

$$7.1.\mathrm{d} : A_\varphi = \left(\begin{array}{rr}1 & -2\\-2 & 3\\1 & -4\end{array}\right), \quad \varphi(\vec{u}) = \left(\begin{array}{r}-1\\1\\3\end{array}\right), \quad \vec{v} = \left(\begin{array}{c}2\\1\end{array}\right)$$

$$7.1.\mathrm{e} : \varphi\left(\begin{array}{c}x\\y\\z\end{array}\right) = \left(\begin{array}{r}x+y+z\\-2y-z\end{array}\right), \quad \varphi(\vec{u}) = \left(\begin{array}{r}6\\-7\end{array}\right), \quad \vec{v} = \left(\begin{array}{r}1\\0\\-1\end{array}\right)$$

$$7.1.\mathrm{f} : A_\varphi = \left(\begin{array}{rr}2 & -3\\-2 & 1\\-1 & 4\end{array}\right)$$

$$7.2.\mathrm{c} : \varphi(p) = \left\{\left[\begin{array}{r}-2\\7\\1\end{array}\right]\right\}$$

$$7.2.\mathrm{d} : \varphi(r) = \left\{\left[\begin{array}{r}-2\\-1\\1\end{array}\right] + s\cdot\left(\begin{array}{r}-2\\7\\1\end{array}\right) + t\cdot\left(\begin{array}{r}-4\\5\\2\end{array}\right),\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$7.3.\mathrm{e} : \dim(\operatorname{Ker}\psi) = 0, \operatorname{Ker}(\psi) = \vec{o}, \dim(\operatorname{Im}\psi) = 2, \operatorname{Im}\psi = \left(\left(\begin{array}{c}2\\2\\1\end{array}\right), \left(\begin{array}{c}3\\1\\0\end{array}\right)\right)$$

$$7.3.\text{f} : \dim(\operatorname{Ker}\psi) = 1, \operatorname{Ker}(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\dim(\operatorname{Im}\psi) = 2, \operatorname{Im}\psi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$7.3.\text{g} : A_\psi = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7.3.\text{h} : A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$