MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 8

V tomto cvičení si představíme **matici přechodu** mezi dvěma bázemi. Ukážeme si, jak ji zkonstruovat a s její pomocí převést vektor zadaný v první bázi do druhé či naopak. Dozvíte se, jak lze transformovat matici lineárního zobrazení či transformace, měníme-li bázi vstupního či výstupního vektorového prostoru. Ve *Skriptech* je tomuto tématu věnována 8. kapitola (Týden 8) na str. 82–88.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

8.1 Matice přechodu

Doposud jsme vektory zadávali pomocí standardní báze, např. pro vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ je to

$$S_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

v případě prostoru $\mathbb{R}^3$ je to trojice

$$S_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

a tak dál. Určitě však v lineární algebře nastávají situace, kdy je výhodnější s vektory pracovat v jiné než standardní bázi. V této kapitole si ukážeme, jak zkonstruovat matici přechodu mezi dvěma bázemi, abychom mohli pro vektor zadaný v jedné bázi rychle najít souřadnice v jiné bázi.

Řešený příklad 8.1.a

Zadání[1]
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ je zadán vektor $\vec{v}$ pomocí souřadnic vyjádřených vzhledem k bázi α:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha, \quad \alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Najděte souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi

$$\beta = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Řešení
Pro přepočítání souřadnic vektoru $\vec{v}$, který je zadaný v bázi α a potřebujeme jej převést do báze β, sestrojíme matici přechodu $P_{\beta\to\alpha}$, kterou posléze použijeme tímto způsobem: $\vec{v}_\beta = P_{\beta\to\alpha} \cdot \vec{v}_\alpha$.[2] Konstrukci matice přechodu $P_{\beta\to\alpha}$ zahájíme tak, že vektory obou bází dáme do rozšířené matice (jako sloupce, přesně v tom pořadí, jak jsou uvedeny v indexu) a následně ji pomocí elementárních řádkových úprav upravujeme tak, aby se na levé straně objevila jednotková matice. Na pravé straně bude poté kýžená matice přechodu $P_{\beta\to\alpha}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} \mathbf{1} & -2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ -2r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim$$

[1] Úloha 9.2 ze *Skript* na str. 101

[2] Všimněte si, že používáme matici přechodu v opačném směru. Zkuste se na uvedený vztah dívat zprava doleva, podobně totiž funguje přepočítávání opačným směrem: $\vec{v}_\alpha = P_{\alpha\to\beta} \cdot \vec{v}_\beta$.
Podrobnější vysvětlení naleznete ve *Skriptech* a Větě 19 a Příkladech 34, 35 na str. 83–85.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} +r_2 \\ \\ -2r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right) : 2 \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

Spočítanou matici přechodu použijeme pro převod mezi bázemi:

$$\vec{v}_\beta = P_{\beta\to\alpha} \cdot \vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Řešený příklad 8.1.b

Zadání

Jsou dány báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Vyjádřete vektor

- $\vec{u}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ v souřadnicích báze α,
- $\vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ v souřadnicích báze β.

Řešení

Pro přepočítání souřadnic vektoru $\vec{u}_\beta$, který je zadaný v bázi β a potřebujeme jej převést do báze α, sestrojíme matici přechodu $P_{\alpha\to\beta}$, kterou posléze použijeme tímto způsobem: $\vec{u}_\alpha = P_{\alpha\to\beta} \cdot \vec{u}_\beta$.

Výpočet $P_{\alpha\to\beta}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2r_2 \\ \\ +3r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & 2 \end{array}\right) \quad \to \quad P_{\alpha\to\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Spočítanou matici $P_{\alpha\to\beta}$ použijeme pro výpočet souřadnic vektoru $\vec{u}_\beta$ v bázi α:

$$\vec{u}_\alpha = P_{\alpha\to\beta} \cdot \vec{u}_\beta = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Pro vyjádření vektoru $\vec{v}_\alpha$ v souřadnicích báze β potřebujeme opačnou matici přechodu $P_{\beta\to\alpha}$. Víme však, že $P_{\beta\to\alpha} = (P_{\alpha\to\beta})^{-1}$. Stačí tedy najít inverzní matici k již spočítané matici přechodu $P_{\alpha\to\beta}$:

Výpočet $(P_{\alpha\to\beta})^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{\mathbf{1}} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +2r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +r_2 \\ \\ +3r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} +2r_3 \\ +2r_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Vypočítanou matici

$$(P_{\alpha\to\beta})^{-1} = P_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

použijeme k výpočtu souřadnic vektoru $\vec{v}_\alpha$ v bázi β:

$$\vec{v}_\beta = P_{\beta\to\alpha} \cdot \vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Příklad 8.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání[3]

Jsou dány báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vyjádřete vektor

- $\vec{u}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ v souřadnicích báze α,
- $\vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ v souřadnicích báze β.

[3] Obě báze jsou převzaty z úlohy 9.3, viz *Skripta* na str. 101.

Příklad 8.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání[4]
Jsou dány báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vyjádřete vektor

- $\vec{u}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ v souřadnicích báze α,
- $\vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v souřadnicích báze β.

8.2 Změna matice lin. zobrazení při změně báze

Často se stává, že máme zadané lineární zobrazení $\varphi : U \to V$, ovšem pro vektory, jejichž souřadnice jsou vyjádřeny ve standardních bázích U, V. Co když přijde požadavek, abychom stejné zobrazení φ použili pro jiné báze vstupního a výstupního prostoru? I v takové chvíli úspěšně využijeme matic přechodu. Ve *Skriptech* jsou tomu věnovány Příklady 36, 37 na str. 86–88.

Řešený příklad 8.2.a

Zadání
Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích vstupního i výstupního vektorového prostoru φ:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sestrojte matici $A_{\beta \to \alpha}$, která vektory zadané v bázi α vstupního prostoru $\mathbb{R}^3$ zobrazí pomocí lineárního zobrazení φ a převede do báze β výstupního prostoru $\mathbb{R}^4$, je-li

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

Využijte matice $A_{\beta \to \alpha}$ při zobrazení vektoru $\vec{u}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ prostřednictvím φ a výsledný vektor převeďte do souřadnic báze β.

[4] Obě báze jsou převzaty z úlohy 9.4, viz *Skripta* na str. 101.

Řešení

Pojďme si nejdříve vysvětlit, co vše budeme potřebovat pro sestrojení matice $A_{\beta\to\alpha}$ sloužící pro zobrazení φ, které však uskutečníme mezi bázemi α, β:

1. nejprve vezmeme vektor $\vec{u}_\alpha$ a převedeme jej do standardní báze S_3 vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. K tomu poslouží matice přechodu $P_{S_3\to\alpha}$, kterou použijeme takto:
$$\vec{u}_{S_3} = P_{S_3\to\alpha} \cdot \vec{u}_\alpha \tag{1}$$

2. vektor $\vec{u}_{S_3}$ nyní můžeme zobrazit pomocí zadané matice A_S a dostaneme vektor $(\varphi(\vec{u}))_{S_4}$ v souřadnicích standardní báze S_4 vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$:
$$(\varphi(\vec{u}))_{S_4} = S \cdot \vec{u}_{S_3} \tag{2}$$

3. zbývá převést zobrazený vektor $(\varphi(\vec{u}))_{S_4}$ ze standardní báze S_4 do báze β, o což se postaráme maticí přechodu $P_{\beta\to S_4}$:
$$(\varphi(\vec{u}))_\beta = P_{\beta\to S_4} \cdot (\varphi(\vec{u}))_{S_4} \tag{3}$$

Začali jsme vektorem $\vec{u}$ zadaným v bázi α, skončili jsme u vektoru $\varphi(\vec{u})$ v souřadnicích báze β. Jednotlivé matice z rovnic 1, 2, 3 nyní musíme vynásobit **zprava doleva**, tj. v opačném pořadí, než jak byly uvedeny, abychom dostali výslednou matici $A_{\beta\to\alpha}$:

$$A_{\beta\to\alpha} = P_{\beta\to S_4} \cdot A_S \cdot P_{S_3\to\alpha} \tag{4}$$

Spočítejme nejdříve obě matice přechodu:

$$P_{S_3\to\alpha}: \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \to \qquad P_{S_3\to\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíte sami, že není třeba nic upravovat. Rozšířená matice již je ve tvaru, v němž nalevo je jednotková matice. Vektory báze α tedy samy tvoří matici přechodu $P_{S_3\to\alpha}$.

$P_{\beta\to S_4}$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +r_2 \\ +2r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +r_3 \\ -2r_3 \\ \\ -2r_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ :(-7) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \begin{matrix} -r_4 \\ +r_4 \\ +r_4 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -1 & -\frac{12}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \qquad P_{\beta\to S_4} = \tfrac{1}{7}\cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -12 & -1 \\ -5 & 1 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dosaďme nyní matice do vztahu 4 a spočítejme matici $A_{\beta\to\alpha}$:

$$\begin{aligned} A_{\beta\to\alpha} &= \frac{1}{7}\cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -12 & -1 \\ -5 & 1 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -12 & -1 \\ -5 & 1 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\cdot \begin{pmatrix} 10 & 15 & 2 \\ -24 & -36 & -9 \\ 13 & 19 & -5 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spočítanou matici $A_{\beta\to\alpha}$ nyní použijeme pro lineární zobrazení vektoru $\vec{u}_\alpha$ a převedení jeho obrazu do báze β:

$$(\varphi(u_\alpha))_\beta = A_{\beta\to\alpha}\cdot\vec{u}_\alpha = \frac{1}{7}\cdot \begin{pmatrix} 10 & 15 & 2 \\ -24 & -36 & -9 \\ 13 & 19 & -5 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\cdot \begin{pmatrix} 38 \\ -87 \\ 56 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{7} \\ -\frac{87}{7} \\ 8 \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

Řešený příklad 8.2.b

Zadání[5]

Přepište zobrazení $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i výstupu maticí

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

do tvaru zadaného na vstupu i výstupu vzhledem k bázi

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Řešení

Tentokrát má vstupní i výstupní prostor stejnou dimenzi, tedy ψ je lineární transformací. Co tedy potřebujeme, abychom vektor $\vec{u}_\alpha$ zobrazili pomocí ψ, které je definováno pro standardní bázi na vstupu i výstupu, a ještě jej následně převedli do báze α? Je to podobné jako v předchozím příkladu:

1. Vektor $\vec{u}_\alpha$ převedeme do standardní báze a dostaneme $\vec{u}_S = P_{S\to\alpha}\cdot\vec{u}_\alpha$.

[5] Úloha 9.5 ze *Skript* na str. 101

2. Vektor $\vec{u}_S$ zobrazíme pomocí ψ, tj. dostaneme $(\psi(\vec{u}_S))_S = D \cdot \vec{u}_S$.
3. Obraz $(\psi(\vec{u}_S))_S$ je ve standardní bázi, takže jej převedeme na vektor $(\psi(\vec{u}_S))_\alpha = P_{\alpha\to S} \cdot (\psi(\vec{u}_S))_S$ zadaný v bázi α.

Jednotlivé matice z předchozích vztahů potřebujeme vynásobit **zprava doleva**, abychom dostali matici $D_{\alpha\to\alpha}$ lineární transformace ψ mající na vstupu i výstupu vektory báze α:

$$D_{\alpha\to\alpha} = P_{\alpha\to S} \cdot D \cdot P_{S\to\alpha} \tag{5}$$

K určení matice $D_{\alpha\to\alpha}$ tedy potřebujeme dvě matice přechodu.

$$P_{S\to\alpha}: \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \to \quad P_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vidíte sami, že není třeba nic upravovat. Rozšířená matice již je ve tvaru, v němž nalevo je jednotková matice. Vektory báze α tedy samy tvoří matici přechodu $P_{S\to\alpha}$.

$$P_{\alpha\to S}: \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \to \quad P_{\alpha\to S} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dosadíme nyní do vztahu 5 a máme požadovanou matici $D_{\alpha\to\alpha}$:

$$\begin{aligned} D_{\alpha\to\alpha} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Řešený příklad 8.2.c

Zadání

Jsou dány báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí A_S ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nalezněte matici $A_{\beta\to\alpha}$ lineární transformace φ, která vektory zadané v bázi α zobrazí pomocí φ a převede do báze β. S pomocí matice $A_{\beta\to\alpha}$ zobrazte vektor $\vec{u}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a zapište jej v souřadnicích báze β.

Řešení

I v tomto příkladu je φ lineární transformace, tentokrát ovšem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, navíc narozdíl od předchozího příkladu přecházíme z báze α přes standardní bázi S do jiné báze β. Schématicky by to šlo znázornit takto:

$$\alpha \to_{P_1} S \to_\varphi S \to_{P_2} \beta, \tag{6}$$

přičemž P_1, P_2 jsou vhodné matice přechodu. Vzhledem ke zvyklostem při aplikaci matic přechodu a matic lineárních zobrazení[6] však zápis 6 musíme otočit a zapsat jej **zprava doleva**:

$$\{P_2 \cdot [A_S \cdot (P_1 \cdot \vec{u}_\alpha)]\}_\beta$$

Z tohoto zápisu je také patrné, že je lépe používat následující schéma, jen je třeba jej číst **zprava doleva**:

$$(\varphi(\vec{u}))_\beta \quad \longleftarrow_{P_{\beta\to S}} \quad \varphi(\vec{u})_S \quad \longleftarrow_{A_S} \quad \vec{u}_S \quad \longleftarrow_{P_{S\to\alpha}} \quad \vec{u}_\alpha \tag{7}$$

Ve vztahu 7 jsou již použity vhodné matice přechodu místo P_1, P_2, které se vyskytovaly ve vztahu 6. Zbývá je tedy spočítat:

$$P_{S\to\alpha}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad P_{S\to\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\beta\to S}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -r_3 \\ -2r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad P_{\beta\to S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici $A_{\beta\to\alpha}$ nyní dostaneme vynásobením matic dle vztahu 7:

$$\begin{aligned} A_{\beta\to\alpha} &= P_{\beta\to S} \cdot A_S \cdot P_{S\to\alpha} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 11 & -1 & 8 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -3 & 10 \\ -23 & 8 & -9 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[6] Zobrazujeme-li vektor pomocí matice či jej transformujeme do jiné báze, násobíme jej příslušnou maticí zleva.

Vypočítanou matici $A_{\beta\to\alpha}$ nyní použijeme ke zobrazení vektoru $\vec{u}_\alpha$ a převedení jeho obrazu do souřadnic báze β:

$$(\varphi(\vec{u}))_\beta = \begin{pmatrix} 16 & -3 & 10 \\ -23 & 8 & -9 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -17 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Příklad 8.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání

Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích vstupního i výstupního vektorového prostoru φ:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sestrojte matici $A_{\beta\to\alpha}$, která vektory zadané v bázi α vstupního prostoru $\mathbb{R}^3$ zobrazí pomocí lineárního zobrazení φ a převede do báze β výstupního prostoru $\mathbb{R}^2$, je-li

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Využijte matice $A_{\beta\to\alpha}$ při zobrazení vektoru $\vec{u}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ prostřednictvím φ a výsledný vektor převeďte do souřadnic báze β.

Příklad 8.2.e (pouze s výsledkem)

Zadání[7]

Přepište zobrazení $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i výstupu maticí

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

do tvaru zadaného na vstupu i výstupu vzhledem k bázi

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Příklad 8.2.f (pouze s výsledkem)

Zadání

Jsou dány báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

[7] Úloha 9.6 ze *Skript* na str. 101

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí A_S ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Nalezněte matici $A_{\alpha\to\beta}$ lineární transformace φ, která vektory zadané v bázi β zobrazí pomocí φ a převede do báze α. S pomocí matice $A_{\alpha\to\beta}$ zobrazte vektor $\vec{u_\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a zapište jej v souřadnicích báze α.

Výsledky příkladů

8.1.c: $\vec{u}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

8.1.d: $\vec{u}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

8.2.d: $A_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} -6 & -15 & -11 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $(\varphi(\vec{u}_\alpha))_\beta = \begin{pmatrix} -25 \\ 6 \end{pmatrix}$

8.2.e: $D_{\alpha\to\alpha} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$

8.2.f: $A_{\alpha\to\beta} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -16 \end{pmatrix}$, $(\varphi(\vec{u}_\beta))_\alpha = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$