MA0005 Algebra 2 – Sbírka řešených příkladů

Lukáš Másilko

4. července 2024

Cvičení 9

V tomto cvičení se zaměříme na Euklidovské prostory, v nichž je zavedena **ortogonalita vektorů**. Ukážeme si Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces, pomocí něhož sestrojíme pro libovolný podprostor ortogonální, či ortonormální bázi. Budeme schopni najít ortogonální doplněk vektorového podprostoru W či kolmý průmět (ortogonální projekci) zadaného vektoru do W. Ve *Skriptech* je tomuto tématu věnována 10. kapitola (Týden 10) na str. 102–108.

Obsah

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

9.1 Ortogonalita vektorů

Dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ ve Euklidovském prostoru V jsou **ortogonální**, když je jejich skalární součin roven nule, tj. $skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Narozdíl od kolmosti vektorů je tedy možné uvažovat i nulové vektory. Ve *Skriptech* na str. 102 jsou uvedeny definice ortogonální (ortonormální) báze podprostoru či posloupnosti vektorů, ortogonální matice či lineárního zobrazení. Zopakujte si též pojem **norma** (velikost) vektoru a jak se s pomocí skalárního součinu spočítá.

Řešený příklad 9.1.a

Zadání

Rozhodněte, zda dané vektory Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou ortogonální, resp. ortonormální.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \ \vec{v} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$

Řešení

Zkontrolujme dvojice vektorů a jejich skalární součiny. Vyjde-li pokaždé nula, jsou vektory ortogonální.

a) $skal(\vec{u}, \vec{v}) = -2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0$
$skal(\vec{u}, \vec{w}) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0$
$skal(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = 0$

Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou ortogonální. Nejsou však ortonormální, jelikož žádný z nich není normovaný. Ukažme si to na vektoru $\vec{u}$:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{18} \neq 1$$

b) $skal(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0$
$skal(\vec{u}, \vec{w}) = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -4$
$skal(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = 0$

Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nejsou ortogonální.

c) $skal(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou ortogonální. Zjistíme jejich normu:

$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1 \\ ||\vec{v}|| &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1 \end{aligned}$$

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou tedy dokonce ortonormální.

Řešený příklad 9.1.b

Zadání

Určete parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané vektory Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ byly ortogonální, je-li

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -a \\ -4 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ -a \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Proveďme skalární součin všech dvojic vektorů:

$$\begin{aligned} skal(\vec{u}, \vec{v}) &= -2b + a^2 + (-a)^2 - 16 = -2b + 2a^2 - 16 \\ skal(\vec{u}, \vec{w}) &= 2a + ab - a^2 \\ skal(\vec{v}, \vec{w}) &= -ab + ab - a^2 = -a^2 \end{aligned}$$

Vektory mají být ortogonální, tj. každý z výše uvedených skalárních součinů musí být nulový. Má-li být skalární součin $skal(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, nutně musí být $a = 0$. Dosadíme tuto hodnotu do zbývajících součinů a položíme je rovny 0:

$$\begin{aligned} skal(\vec{u}, \vec{v}) &= -2b + 2 \cdot 0^2 - 16 = 0 \\ skal(\vec{u}, \vec{w}) &= 2 \cdot 0 + 0 \cdot b - 0^2 = 0 \end{aligned}$$

Druhá rovnice je platná pro libovolnou hodnotu b. Po úpravě první rovnice dostáváme $-2b - 16 = 0$, z čehož $b = -8$.

Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou ortogonální pro $a = 0, b = -8$.

Příklad 9.1.c (pouze s výsledkem)

Zadání

Určete parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané vektory Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ byly ortogonální, je-li

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ b \\ a \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.1.d (pouze s výsledkem)

Zadání
Určete parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané vektory Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ byly ortogonální, je-li

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -a \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2 Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Představme si následující situaci: podprostor W vektorového prostoru V dimenze $k \in \mathbb{N}$ je generován bází $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k})$. Jak najít bázi podprostoru W, jejíž vektory budou ortogonální, případně ortonormální? Pomůže nám k tomu Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces.

Řešený příklad 9.2.a

Zadání
V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení
Nejdříve určíme dimenzi W, tj. vložme zadané vektory do matice a určeme její hodnost.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože je hodnost matice 3, platí $\dim W = 3$, a tudíž vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ tvoří bázi W. Zahájíme Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces.

1. Položme $\vec{e_1} = \vec{u_1}$.

2. Hledáme vektor $\vec{e_2} = p_1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2}$. Jestliže tuto rovnici skalárně vynáso-

bíme vektorem $\vec{e_1}$, dostáváme díky ortogonalitě vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}$

$$\begin{aligned}
skal(\vec{e_2}, \vec{e_1}) &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + skal(\vec{u_2}, \vec{e_1}) \\
0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + skal(\vec{u_2}, \vec{e_1}) \\
p_1 &= -\frac{skal(\vec{u_2}, \vec{e_1})}{skal(\vec{e_1}, \vec{e_1})} \\
p_1 &= -\frac{skal\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{skal\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)} \\
p_1 &= -\frac{2+0+1+0}{1+0+1+1} = -1
\end{aligned}$$

Tedy

$$\vec{e_2} = -1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Hledáme vektor $\vec{e_3} = p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3}$. Tuto rovnici skalárně vynásobíme vektory $\vec{e_1}$ a $\vec{e_2}$ a dostaneme dvě rovnice, které následně díky ortogonalitě vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ upravíme, abychom získali hodnoty parametrů p_1, p_2:

$$\begin{array}{rcl}
skal(\vec{e_3}, \vec{e_1}) &=& p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + p_2 \cdot skal(\vec{e_2}, \vec{e_1}) + skal(\vec{u_3}, \vec{e_1}) \\
skal(\vec{e_3}, \vec{e_2}) &=& p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_2}) + p_2 \cdot skal(\vec{e_2}, \vec{e_2}) + skal(\vec{u_3}, \vec{e_2}) \\
\hline
0 &=& p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + p_2 \cdot 0 + skal(\vec{u_3}, \vec{e_1}) \\
0 &=& p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot skal(\vec{e_2}, \vec{e_2}) + skal(\vec{u_3}, \vec{e_2}) \\
\hline
-skal(\vec{u_3}, \vec{e_1}) &=& p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \\
-skal(\vec{u_3}, \vec{e_2}) &=& p_2 \cdot skal(\vec{e_2}, \vec{e_2})
\end{array}$$

Z posledních dvou rovnic vyjádříme parametry p_1, p_2:

$$p_1 = -\frac{skal(\vec{u_3}, \vec{e_1})}{skal(\vec{e_1}, \vec{e_1})} = -\frac{skal\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{skal\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = -\frac{skal(\vec{u_3}, \vec{e_2})}{skal(\vec{e_2}, \vec{e_2})} = -\frac{skal\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}{skal\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)} = -\frac{-3}{3} = 1$$

Spočítané hodnoty parametrů p_1, p_2 dosadíme do vyjádření vektoru $\vec{e_3}$:

$$\vec{e_3} = \frac{1}{3} \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Závěr: ortogonální bází podprostoru W je například

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}\right)$$

Řešený příklad 9.2.b

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Nejdříve určíme dimenzi W, tj. vložme zadané vektory do matice a určeme její hodnost.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +2r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je 2, tudíž $\dim W = 2$ a bázi podprostoru W tvoří pouze dva vektory, třeba $\vec{u_1}, \vec{u_2}$. Z nich vytvoříme ortogonální bázi W pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu:

1. Položme $\vec{e_1} = \vec{u_1}$.

2. Hledáme vektor $\vec{e_2} = p_1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2}$. Tuto rovnici skalárně vynásobíme vektorem $\vec{e_1}$ a díky ortogonalitě vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ zjednodušíme vztah tak,

že dokážeme vyjádřit parametr p_1:

$$\begin{aligned}
skal(\vec{e_2},\vec{e_1}) &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1},\vec{e_1}) + skal(\vec{u_2},\vec{e_1}) \\
0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1},\vec{e_1}) + skal(\vec{u_2},\vec{e_1}) \\
p_1 &= -\frac{skal(\vec{u_2},\vec{e_1})}{skal(\vec{e_1},\vec{e_1})} \\
p_1 &= -\frac{skal\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right)}{skal\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right)} \\
p_1 &= -\frac{1+0+2+0}{1+4+4+0} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Tedy

$$\vec{e_2} = -\frac{1}{3}\cdot\vec{e_1} + \vec{u_2} = \begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\-2/3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\\1\end{pmatrix}$$

Závěr: ortogonální bází podprostoru W je tedy

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\\1\end{pmatrix}\right)$$

Příklad 9.2.c (pouze s výsledkem)

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = \langle \vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\vec{u_4}\rangle$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-7\end{pmatrix}.$$

Příklad 9.2.d (pouze s výsledkem)

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W = \langle \vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\vec{u_4}\rangle$, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u_4} = \begin{pmatrix}2\\-3\\5\\-2\end{pmatrix}.$$

9.3 Ortogonální doplněk

Dalším pojmem je ortogonální doplněk k zadanému podprostoru W vektorového prostoru V. Jedná se o množinu vektorů $\vec{u} \in V$ takových, že jsou ortogonální k libovolnému vektoru $\vec{v} \in W$. Ortogonální doplněk značíme $W^{\perp}$, je rovněž podprostorem V a platí pro něj některé další vlastnosti uvedené ve *Skriptech* na str. 104–106, především

$$\boxed{\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V.} \tag{1}$$

Řešený příklad 9.3.a

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor W. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $W^{\perp}$, je-li $W = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \rangle$ a

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Řešení

Hledáme vektory $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ takové, že jsou ortogonální s každým ze čtyř vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$, tj. že platí $skal(\vec{u_i}, \vec{x}) = 0$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Je-li $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, vychází nám homogenní systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 9x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Systém vložíme do matice a Gaussovou eliminační metodou spočítáme jeho řešení:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \\ 3 & -9 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ -3r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \end{pmatrix}$$

Zůstal pouze jeden nenulový řádek. To znamená jednu rovnici o čtyřech neznámých, tedy nekonečně mnoho řešení závislých na $4 - 1 = 3$ parametrech.

Než se pustíme do zápisu řešení pomocí zpětného chodu, potvrďme si ještě platnost vztahu (1). Homogenní systém jsme sestavili z vektorů podprostoru W, které jsme dali do řádků matice. Úpravou na horní schodový tvar jsme zjistili, že hodnost matice je 1. Tím jsme zároveň určili $\dim W = 1$. Dle vztahu (1) je tedy $\dim W^{\perp} = 3$ a my skutečně zavedeme tři parametry, kterým budou odpovídat tři generátory báze ortogonálního doplňku $W^{\perp}$.

Jediný nenulový řádek výsledné matice znamená rovnici

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.$$

Zvolme proměnné x_2, x_3, x_4 jako parametry, tj. $x_2 = r, x_3 = s, x_4 = t$. Dostaneme tím rovnici $x_1 - 3r - s + 2t = 0$, z čehož $x_1 = 3r + s - 2t$. Zapíšeme řešení systému:

$$K = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Z něj je patrná báze ortogonálního doplňku $W^\perp$:

$$W^\perp = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Řešený příklad 9.3.b

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor W. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r - s + 5u \\ 3r + 2s + t + 2u \\ 2r + s + t \\ -4r - s - 3t + 4u \end{pmatrix},\ r, s, t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Řešení

Nejprve si najděme vektory, které generují podprostor W. Jednoduše je zapíšeme jako koeficienty u jednotlivých parametrů, tedy

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Opět hledáme vektory $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ takové, že jsou ortogonální s každým ze čtyř vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$, tj. že platí $skal(\vec{u_i}, \vec{x}) = 0$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Je-li $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, vychází nám homogenní systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

Systém vložíme do matice a spočítáme jeho řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ \\ -5r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -13 & -10 & 24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -13 & -10 & 24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -5r_2 \\ +13r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :2 \\ :3 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \color{red}{-1} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \end{pmatrix}$$

Po převodu na schodový tvar zůstaly tři nenulové řádky. Je z toho patrné, že $\dim W = 3$, a tedy $\dim W^{\perp} = 1$. Zpětným chodem získáme vektor generující ortogonální doplněk $W^{\perp}$:

- Poslední nenulový řádek znamená rovnici $-x_3 + 5x_4 = 0$. Položme $x_4 = t, t \in \mathbb{R}$. Dosazením do uvedené rovnice a její úpravou získáme $x_3 = 5t$.
- Pokračujeme nahoru na další nenulový řádek, který přepíšeme do rovnice $x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$. Dosadíme do ní vyjádření proměnných x_3, x_4 a získáváme $x_2 + 5t - 3t = 0$, z čehož $x_2 = -2t$.
- Prvním řádkem rozumíme rovnici $x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$. Dosadíme do ní za proměnné x_2, x_3, x_4 a dostaneme $x_1 + 3t + 2t - 4t = 0$, z čehož $x_1 = -t$.

Zapíšeme řešení systému:

$$K = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Z něj je patrná báze ortogonálního doplňku $W^{\perp}$:

$$W^{\perp} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Řešený příklad 9.3.c

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je množina vektorů W dána jako podprostor řešení homogenního lineárního systému rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $W^{\perp}$.

Řešení

Systém obsahuje dvě rovnice, které zřejmě nejsou násobky sebe sama. Vzhledem k počtu proměnných bude tedy systém mít nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech. Tudíž W jako podprostor řešení systému bude generován dvěma vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ (dle počtu parametrů), tj. $\dim W = 2$, z čehož $\dim W^{\perp} = 2$.

Dosazením libovolného z vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ do levých stran obou rovnic dostaneme 0 – jsou přece řešením systému. To ovšem znamená, že vytvoříme-li z koeficientů obou rovnic systému vektory

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a vynásobíme je skalárně s vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}$, dostaneme pokaždé 0. Vektory $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ tedy tvoří bázi ortogonálního doplňku $W^{\perp}$:

$$W^{\perp} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Příklad 9.3.d (pouze s výsledkem)

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor W. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $W^{\perp}$, je-li $W = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$ a

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Příklad 9.3.e (pouze s výsledkem)

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor W. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $W^{\perp}$, je-li

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r - s + 2t \\ -r + 2s + 3t \\ 2r + t \\ 4r - 3s \end{pmatrix}, \ r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

9.4 Ortogonální projekce vektoru

Ortogonalitu vektorů lze využít i při hledání **kolmého průmětu** (též ortogonální projekce) vektoru $\vec{w}$ do podprostoru W vektorového prostoru V. Pro vektor $\vec{w}$ a jeho ortogonální projekci $\vec{x}$ do podprostoru W platí

$$\boxed{\vec{w} = \vec{x} + \vec{y},} \tag{2}$$

kde $\vec{y} \in W^{\perp}$, což lze využít například pro spočítání odchylky vektoru $\vec{w}$ od podprostoru W (jde úhel mezi $\vec{w}$ a jeho kolmým průmětem $\vec{x}$).

Řešený příklad 9.4.a

Zadání

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je zadán podprostor $W = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$. Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{w}$ do podprostoru W, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Nejprve zjistíme dimenzi podprostoru W:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ +r_1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Podprostor W je tedy rovinou v $\mathbb{R}^4$ generovanou např. vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}$. Kolmý průmět $\vec{x}$ zadaného vektoru $\vec{w}$ leží ve W, lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{u_1}, \vec{u_2}$:

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2}, \tag{3}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Protože by zároveň měl platit vztah (2): $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$, kde $\vec{y} \in W^{\perp}$, lze vektor $\vec{w}$ vyjádřit s pomocí rovnice (3) i takto:

$$\vec{w} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \vec{y}. \tag{4}$$

Rovnici (4) nyní skalárně vynásobíme vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ a dostaneme tyto dvě rovnice:

$$skal(\vec{w}, \vec{u_1}) = \alpha_1 \cdot skal(\vec{u_1}, \vec{u_1}) + \alpha_2 \cdot skal(\vec{u_2}, \vec{u_1}) + skal(\vec{y}, \vec{u_1}) \tag{5}$$

$$skal(\vec{w}, \vec{u_2}) = \alpha_1 \cdot skal(\vec{u_1}, \vec{u_2}) + \alpha_2 \cdot skal(\vec{u_2}, \vec{u_2}) + skal(\vec{y}, \vec{u_2}) \tag{6}$$

Jelikož je vektor $\vec{y}$ kolmý na podprostor W (leží v ortogonálním doplňku $W^{\perp}$), je v obou rovnicích poslední skalární součin roven 0. Ostatní skalární součiny jsme schopni spočítat:

$$skal(\vec{w}, \vec{u_1}) = skal\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 7,$$

$$skal(\vec{w}, \vec{u_2}) = skal\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$skal(\vec{u_1}, \vec{u_1}) = skal\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 14,$$

$$skal(\vec{u_2},\vec{u_1}) = skal(\vec{u_1},\vec{u_2}) = skal\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -3,$$

$$skal(\vec{u_2},\vec{u_2}) = skal\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 3.$$

Dosadíme-li spočítané skalární součiny do rovnic (5), (6), dostáváme tento systém:

$$\begin{aligned} 7 &= 14\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ 0 &= -3\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice získáváme vztah $\alpha_1 = \alpha_2$, který dosadíme do první a máme $7 = 14\alpha_2 - 3\alpha_2$, z čehož $\alpha_2 = \alpha_1 = \frac{7}{11}$. Využijeme-li nyní hodnot obou parametrů ve vztahu (3), dostáváme kolmý průmět $\vec{x}$ vektoru $\vec{w}$ do podprostoru W:

$$\vec{x} = \frac{7}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{11} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešený příklad 9.4.b

Zadání

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů:

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Určete kolmý průmět vektoru $\vec{w} = (-6; 0; 2)^T$ do podprostoru W. Následně stanovte odchylku φ vektoru $\vec{w}$ od W pomocí kolmého průmětu $\vec{x}$.

Řešení

Je patrné, že jsou vektory $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ lineárně nezávislé. Generují tedy rovinu W v prostoru $\mathbb{R}^3$. Kolmý průmět $\vec{x}$ vektoru $\vec{u}$ má ležet v prostoru W, lze jej tedy vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\vec{w_1}, \vec{w_2}$:

$$\vec{x} = a \cdot \vec{w_1} + b \cdot \vec{w_2}, \tag{7}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Protože by zároveň měl platit vztah (2): $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$, kde $\vec{y} \in W^{\perp}$, lze vektor $\vec{w}$ vyjádřit s pomocí rovnice (7) i takto:

$$\vec{w} = a \cdot \vec{w_1} + b \cdot \vec{w_2} + \vec{y}. \tag{8}$$

Rovnici (8) nyní skalárně vynásobíme vektory $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ a dostaneme tyto dvě rovnice:

$$\begin{aligned} skal(\vec{w},\vec{w_1}) &= a \cdot skal(\vec{w_1},\vec{w_1}) + b \cdot skal(\vec{w_2},\vec{w_1}) + skal(\vec{y},\vec{w_1}) \quad (9) \\ skal(\vec{w},\vec{w_2}) &= a \cdot skal(\vec{w_1},\vec{w_2}) + b \cdot skal(\vec{w_2},\vec{w_2}) + skal(\vec{y},\vec{w_2}) \quad (10) \end{aligned}$$

Jelikož je vektor $\vec{y}$ kolmý na podprostor W (leží v ortogonálním doplňku $W^{\perp}$), je v obou rovnicích poslední skalární součin roven 0. Ostatní skalární součiny jsme schopni spočítat:

$$skal(\vec{w},\vec{w_1}) = skal\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 10,$$

$$skal(\vec{w},\vec{w_2}) = skal\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 6,$$

$$skal(\vec{w_1},\vec{w_1}) = skal\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 6,$$

$$skal(\vec{w_2},\vec{w_1}) = skal(\vec{w_1},\vec{w_2}) = skal\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = -2,$$

$$skal(\vec{w_2},\vec{w_2}) = skal\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 10.$$

Dosadíme-li spočítané skalární součiny do rovnic (9), (10), dostáváme tento systém:

$$\begin{aligned} 10 &= 6a - 2b \\ 6 &= -2a + 10b \end{aligned}$$

Vynásobíme-li třikrát 2. rovnici a přičteme k první, dostáváme $28 = 28b$, z čehož $b = 1$. Dosazením $b = 1$ do druhé rovnice získáváme $6 = -2a + 10$, z čehož $a = 2$. Využijeme-li nyní hodnot obou parametrů ve vztahu (7), dostáváme kolmý průmět $\vec{x}$ vektoru $\vec{w}$ do podprostoru W:

$$\vec{x} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odchylku vektoru $\vec{w}$ od roviny W stanovíme jako úhel φ, který svírá $\vec{w}$ se svým kolmým průmětem $\vec{x}$. Použijeme k tomu známý vzorec:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{skal(\vec{w},\vec{x})}{|\vec{w}| \cdot |\vec{x}|} \\ &= \frac{skal\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{26}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{26}} = \sqrt{\frac{26}{40}} = \sqrt{\frac{13}{20}} \end{aligned}$$

Na kalkulačce lze spočítat přibližnou velikost úhlu $\varphi = 36°$, tedy odchylky vektoru $\vec{w}$ od roviny W.

Příklad 9.4.c (pouze s výsledkem)

Zadání
Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů:

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Určete kolmý průmět vektoru $\vec{w} = (-2; -4; -6)^T$ do podprostoru W. Následně stanovte odchylku φ vektoru $\vec{w}$ od W pomocí kolmého průmětu $\vec{x}$.

Příklad 9.4.d (pouze s výsledkem)

Zadání
V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je zadán podprostor $W = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle$. Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{w}$ do podprostoru W, je-li

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledky příkladů

9.1.c: $a = 3, b = 2,$
9.1.d: $(a = 2, b = 4) \vee (a = -2, b = -4).$

9.2.c: $W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

9.2.d: $W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

9.3.d: $\dim W^\perp = 2$, pokud např. $x_3 = r, x_4 = s$, pak $W^\perp = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

9.3.e: $\dim W^\perp = 1$, pokud např. $x_4 = t$, pak $W^\perp = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

9.4.c: Kolmý průmět $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, odchylka $\vec{w}$ od roviny W je přibližně $47°$.

9.4.d: Ortogonální projekce $\vec{x} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.