CVIČENÍ 10

Číselné řady

PŘÍKLAD 10.1. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + 7}.$$

Řešení. $\frac{1}{n^2-3n+7} \sim \frac{1}{n^2}$ anebo $\frac{1}{n^2-3n+7} \leq \frac{1}{n^2-3n} = \frac{1}{n(n-3)} \leq \frac{1}{(n-3)^2}$

PŘÍKLAD 10.2. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$$

Řešení. Lze použít srovnávací kriterium v limitním tvaru: $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{nn}} = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} : \frac{1}{n} \to 1$ při $n \to \infty$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ anebo $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2}} = \frac{1}{n+2}$. Řada diverguje.

PŘÍKLAD 10.3. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

Řešení. Máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s $a_n = \frac{n^3}{2^n}$. Použijme d'Alemebertovo podílové kriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{2}$$

při $n \to \infty$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, řada konverguje.

Mohli bychom použít i Cauchyho odmocninové kriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt[n]{n})^3 \to \frac{1}{2}$$

při $n \to \infty$, neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (protože $n^{\frac{1}{n}} = e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln n = 0$ podle l'Hôpitalova pravidla).

PŘÍKLAD 10.4. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}.$$

Řešení. Použijme d'Alemebertovo podílové kriterium: pro $a_n = \frac{5^n}{n!}$ bude

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{5^n} = 5 \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{5}{n+1}$$

a proto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$. Řada konverguje.

PŘÍKLAD 10.5. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Řešení. Použijme d'Alemebertovo podílové kriterium: pro $a_n = \frac{n!}{n^n}$ bude

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = (n+1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, bude $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1} < 1$. Řada konverguje.

PŘÍKLAD 10.6. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Řešení. Pro $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ je

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \to \frac{1}{e}$$

při $n \to \infty$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} \neq 0$, t. j. není splněna nutná podmínka konvergence řady.

PŘÍKLAD 10.7. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Řešení. Platí $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ a tudíž $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$, tedy $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ při $n \to \infty$. Pak pro $a_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ je

$$a_n \sim \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

při $n \to \infty$. Položíme-li $b_n = \frac{1}{n^2}$, bude $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, pak dle srovnávacího kriteria konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

PŘÍKLAD 10.8. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Řešení. Pro $n \to \infty$ roste $\ln n$ pomaleji než jakákoliv odmocnina z n: je-li $0 < \alpha < 1$, podle l'Hôpitalova pravidla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\alpha n^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Mimo jiné, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$. Pak pro dostatečně velká n bude $\ln n \leq \sqrt{n}$ a tudíž

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, pak dle srovnávacího kriteria konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.