CVIČENÍ 1

ÚLOHA 1.1. Derivujte $f(x) = x \operatorname{tg} x - \arcsin(x^3) + \frac{3}{2}\sin\pi$.

ÚLOHA 1.2. Derivujte $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$.

ÚLOHA 1.3. Derivujte $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Nápověda. Využijte $\ln f(x)$.

Řešení. $\ln f(x) = \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\cdot\ln x$, $f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}$,

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right)' = f(x)\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = x^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right) = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right).$$

ÚLOHA 1.4. Derivujte $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Řešení 1.4.1. $f'(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'$ atd. (zdlouhavé).

Řešení 1.4.2. $\ln f(x) = \frac{3}{4}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{3}{4}\ln\left(x^2-1\right) - \frac{3}{4}\ln\left(x^2+1\right)$,

$$(\ln f(x))' = \frac{3}{4}\frac{2x}{x^2-1} - \frac{3}{4}\frac{2x}{x^2+1}.$$

Jelikož obecně platí $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, bude

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))' = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{3x^2}{1-x^4}.$$

ÚLOHA 1.5. Zapište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(1) v bodech $x = 2$, $x = -2$.
(2) v bodě $x = 1$.

Co lze říct o chování funkce v okolí těchto bodů?

Ř e š e n í. Definiční obor: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$; body ± 2 a 1 tam patří.

Rovnice tečny v bodě $x = x_0$ je $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

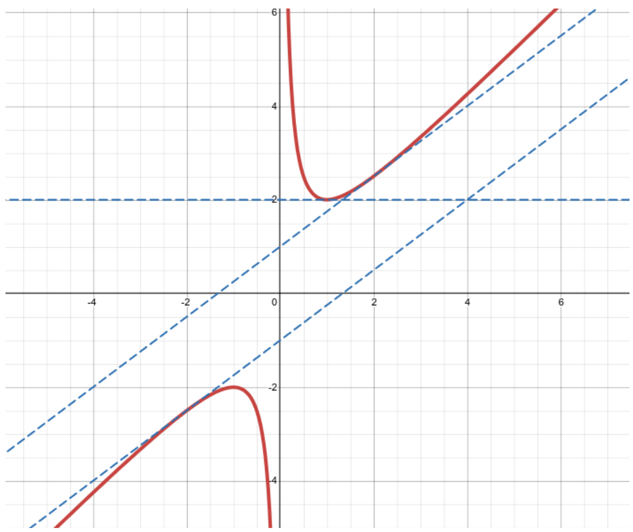
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Pro $x_0 = 2$: $f'(2) = \frac{3}{4}$ (rostoucí), $f(2) = \frac{5}{2}$, rovnice tečny $y = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}(x-2)$, $y = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}(x-2)$, $y = \frac{3}{4}x + 1$

Pro $x_0 = -2$: f je lichá, $f(-2) = -f(2) = -\frac{5}{2}$; f' je sudá, $f'(-2) = f'(2) = \frac{3}{4}$ (rostoucí), rovnice tečny $y = -\frac{5}{2} + \frac{3}{4}(x-2)$, $y = \frac{3}{4}x - 1$

Pro $x_0 = 1$: $f'(1) = 0$, směrnice tečny je 0, tečna je vodorovná. Při $x > 1$ je $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0$, při $x < 1$ bude $f'(x) < 0$. V bodě $x = 1$ má funkce lokální minimum.

Dalším bodem extrému je -1, kde je lokální maximum (funkce je lichá a graf je souměrný podle počátku). Jiné body extrému, očividně, nejsou. Graf viz obrázek 1.1.



OBRÁZEK 1.1