CVIČENÍ 2

ÚLOHA 2.1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Načrtněte graf funkce a tečnu v bodě $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Řešení. Definiční obor $(-\infty, \infty)$; sudá; bez průsečíků s vodorovnou osou;

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xf(x),$$
$$f''(x) = -2\big(f(x) + xf'(x)\big) = -2\big(f(x) - 2x^2 f(x)\big) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Jediný stacionární bod 0 je bodem lokálního maxima o hodnotě $f(0) = 1$ (neboť $f''(0) < 0$; také protože je $f'(x) > 0$ při $x < 0$ a opačně při $x > 0$).

Inflexní body: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rovnice tečny v bodě $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$y = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vypočtěme: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$; $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = -\sqrt{\frac{2}{e}}$. Rovnice tečny v bodě $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bude: $y = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$y = -\sqrt{\frac{2}{e}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

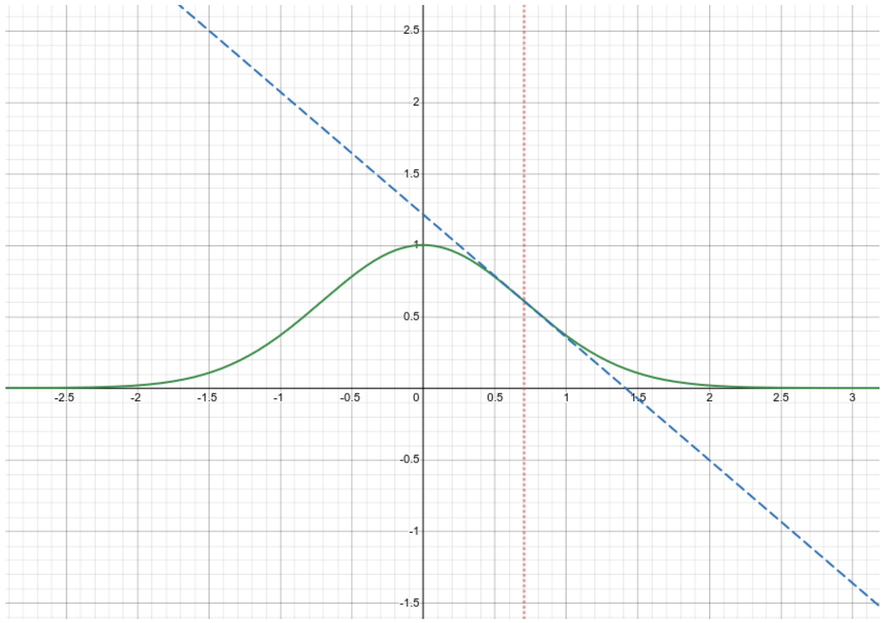
ÚLOHA 2.2. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{|x|}{(x-1)^2}.$$

Načrtněte graf funkce a tečnu v bodě $x = -2$.

Řešení. Definiční obor: $x \neq 1$. Svislá přímka $x = 1$ je asymptotou pro $x \to 1\pm$:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{|x|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1+} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 1-} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1-} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty.$$



OBRÁZEK 2.1. $f(x) = e^{-x^2}$

Jelikož

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{(x-1)^2} = 0,$$

je vodorovná přímka $y = 0$ asymptotou v $\pm\infty$.

V bodě 0 je pravděpodobně porušena hladkost. Vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3}, & x > 0; \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{-x}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{(x-1)^3}, & x < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Zbývá případ $x = 0$. Jelikož dle jednotlivých částí vzorce (2.1) je

$$\lim_{x\to0+} f'(x) = \lim_{x\to0+} -\frac{x+1}{(x-1)^3} = 1, \quad \lim_{x\to0-} f'(x) = \lim_{x\to0+} -\frac{x+1}{(x-1)^3} = -1,$$

derivace v bodě 0 neexistuje.[1]

Stacionární body: -1 a 0 ($f'(-1) = 0$, $f'(0)$ neexistuje).

Vypočtěme druhou derivaci (opět zvlášť na $(0, +\infty)$ a $(-\infty, 0)$):

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x+1}{(x-1)^3} = -\frac{(x-1)^3 - 3(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^6} = 2\frac{x+2}{(x-1)^4}, & x > 0; \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x+1}{(x-1)^3} = -\frac{x+2}{(x-1)^4}, & x < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Vyšetřeme stacionární bod -1 s pomocí f'': podle druhého vzorce v (2.2) je $f''(-1) = -\frac{1}{2^4} < 0$, proto v -1 je lokální maximum. Totéž s pomocí znaménka f' v okolí -1: $f'(x) > 0$ pro $x < -1$ a $f'(x) < 0$ pro $-1 < x < 0$ (počítáme podle druhé části vzorce (2.1) pro záporné hodnoty x). V bodě -1 tedy je lokální maximum o hodnotě $f(-1) = \frac{1}{4}$.

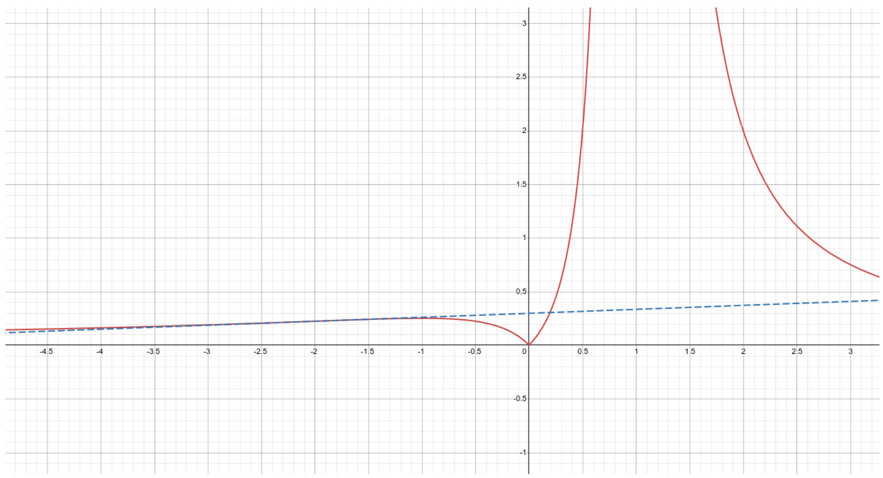
Body, podezřelé z inflexe: -2 a 0 ($f''(-2) = 0$, $f''(0)$ neexistuje).

[1]Zde ve skutečnosti neexistuje $f'(0)$, avšak máme k dispozici jednostranné derivace $f'_-(0) = -1$ a $f'_+(0) = 1$. Geometricky to znamená, že tečny ke grafu funkce v bodě 0 vlevo a vpravo mají různé směrnice (obrázek 2.2). Viz poznámka pod čarou 2, str. 3.

Znaménko f'': $f''(x) > 0$ pro $x < -2$ a $f''(x) < 0$ pro $-2 < x < 0$ (používáme druhý vzorec v (2.2)) a $f''(x) > 0$ pro $x > 0$ (podle prvního vzorce v (2.2)). Funkce je tedy konkávní na $(-2, 0)$ a konvexní všude jinde. Body -2 a 0 jsou inflexní.

Asymptoty: $y = 0$ pro $x \to +\infty$ a $x \to -\infty$; $x = 1$ bez směrnice.

Tečna v $x = -2$: $y = f(-2) + f'(-2)(x + 2)$. Vypočtěme: $f(-2) = \frac{2}{(-2-1)^2} = \frac{2}{9}$, $f'(-2) = \frac{-2+1}{(-2-1)^3} = \frac{1}{27}$; rovnice je $y = \frac{2}{9} + \frac{1}{27}(x + 2)$, $y = \frac{1}{27}x + \frac{8}{27}$.



OBRÁZEK 2.2. $f(x) = \frac{|x|}{(x-1)^2}$

ÚLOHA 2.3. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Načrtněte graf funkce a tečnu v bodě $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Řešení. Definiční obor: $-1 \le x \le 1$ (musí být $x^{\frac{2}{3}} \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le 1$, protože mocnina 3 je lichá). Funkce je sudá.

Derivace:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-x^{\frac{2}{3}}\right) = -\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Stacionární body 0 a ± 1; $f'(\pm 1) = 0$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, 1)$, tedy na $(0, 1)$ klesající (na $(-1, 0)$ pak rostoucí kvůli sudosti). Tečna v bodech $x = \pm 1$ je vodorovná. (Upozorněni: v případě derivace v 1, což je krajním bodem definičního oboru, se jedná o jednostrannou limitu při $x \to 1-$, což je $f'_-(1)$, tzv. jednostranná derivace zleva[2]; podobně v -1 se jedná o $f'_+(-1)$). V bodech $x = \pm 1$ se graf dotyká vodorovné osy (a za tyto meze dále nepokračuje).

[2]Jednostranné derivace se definují takto:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivace $f'(x_0)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a je $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Jednostranné derivace jsou užitečné právě v případech, podobných zde uvažovanému.

Posledním stacionárním bodem je 0. Vzniká otázka, zda existuje $f'(0)$ a, existuje-li, jakou má hodnotu. Pro odpověď vypočtěme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0-} f'(x) = -\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

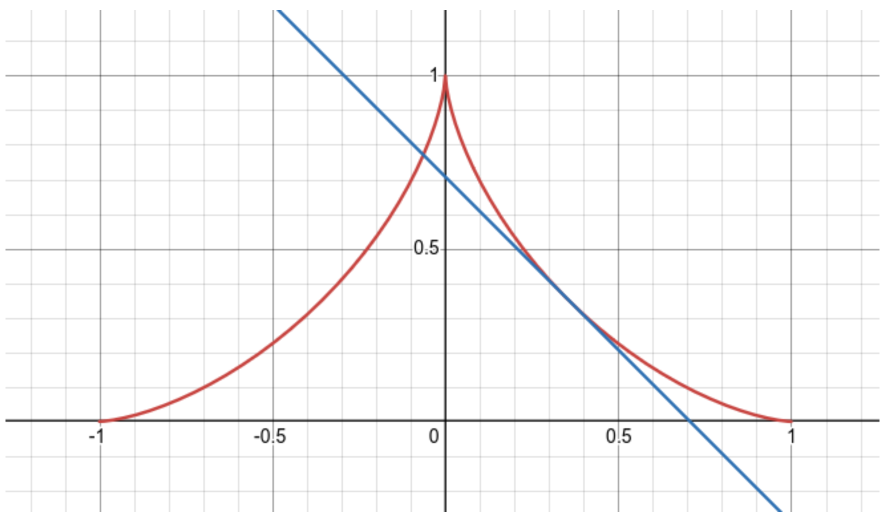
Hodnoty jednostranných derivací[3] v 0 jsou nevlastní (vyjadřují „nekonečně rychlý“ růst vlevo od 0 a pokles vpravo od 0). V bodě 0 se tedy jedná o svislou tečnu (svislá souřadná osa $x = 0$).

Rovnice tečny v bodě $x = \frac{\sqrt{2}}{4} = 2^{-\frac{3}{2}}$: $y = f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) + f'\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)\left(x - 2^{-\frac{3}{2}}\right)$;

Vypočtěme: $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(1-2^{-1}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1-2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = -1$; rovnice bude $y = 2^{-\frac{3}{2}} - \left(x - 2^{-\frac{3}{2}}\right)$, $y = -x + 2\cdot 2^{-\frac{3}{2}}$,

$$y = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Poznámka. Tečnu v bodě $x = 2^{-\frac{3}{2}}$ jednoduše sestrojíme, a to bez jakýchkoliv výpočtů, uvědomíme-li si souměrnost grafu podle přímky $y = x$: grafem dané funkce totiž je horní část tzv. *astroidy* o rovnicí $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$ a právě při $x = 2^{-\frac{3}{2}}$ se graf protíná s přímkou $y = x$ (stačí si všimnout, že je astroida souměrná podle přímky $y = x$, jelikož její rovnice zůstává neměnná při zaměně x a y).



Obrázek 2.3. $f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

[3] Viz poznámka pod čarou 2, str. 3.