CVIČENÍ 3

Výpočet integrálu s pomocí tabulky a elementárních úprav

V následujících úlohách v příslušném oboru vypočtěme integrál neurčitý.

ÚLOHA 3.1. Vypočtěte

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}} + x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}} + x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + x\right) x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{1}{4}} + x\right) x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \int \left(x^{-\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

ÚLOHA 3.2. Vypočtěte

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x + \int x^{-2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$$
$$= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}.$$

ÚLOHA 3.3. Vypočtěte

$$\int 2^x 3^{2x} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} \,\mathrm{d}x = \int \left(2 \cdot 3^2\right)^x \mathrm{d}x = \int (2 \cdot 9)^x \,\mathrm{d}x = \int 18^x \,\mathrm{d}x = \frac{18^x}{\ln 18}.$$

ÚLOHA 3.4. Vypočtete

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Úpravou dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{3}{2}-x^2\right)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Je to integrál tvaru $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, který lze vypočíst po úpravě

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x$$

s pomocí vzorce pro integrál funkce s lineárně pozměněným argumentem:

$$\int f(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta), \tag{3.1}$$

kde $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{a}}\arcsin\frac{x}{a}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}$$

a tudíž

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

ÚLOHA 3.5. Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\arcsin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\arcsin x)'}{\arcsin x}\,\mathrm{d}x$$

Dle vzorce

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| \tag{3.2}$$

bude

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\arcsin x|.$$

ÚLOHA 3.6. Vypočtěte

$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.
$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2-2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - 2\int (x+2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x+2| + \frac{2}{x+2}.$$

ÚLOHA 3.7. Vypočtěte
$$\int (\cosh 2x)^2\,\mathrm{d}x,$$
kde $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

Řešení. Úpravou obdržíme
$$\int (\cosh 2x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(e^{4x} + 2e^{2x}e^{-2x} + e^{-4x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(e^{4x} + 2 + e^{-4x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\int e^{4x}\,\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x + \int e^{-4x}\,\mathrm{d}x\right).$$
Dle vzorce
$$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta),$$
kde $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, bude
$$\int e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}.$$
Proto
$$\int (\cosh 2x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4x} + 2x - \frac{1}{4}e^{-4x}\right).$$

ÚLOHA 3.8. Vypočtěte
$$\int \mathrm{tg}^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$
kde α je konstanta.

Řešení. Nechť $\alpha \neq 0$. Funkce v integrandu je definovaná a spojitá v intervalech, neobsahujících body $\frac{\pi}{2\alpha} + k\frac{\pi}{\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$ (protože nesmí být αx v bodech nespojitosti funkce $x \mapsto \mathrm{tg}\,x$: $\alpha x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$). Platí $1 + \mathrm{tg}^2\,x = \frac{1}{\cos^2 x}$ a tudíž
$$\int \mathrm{tg}^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2(\alpha x)} - 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\,\mathrm{d}x - x.$$
Jelikož $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x$, dle vzorce (3.1) bude
$$\int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tg}(\alpha x)$$
a dostaneme
$$\int \mathrm{tg}^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tg}(\alpha x) - x + C$$
v každém intervalu, neobsahujícím body $\frac{\pi}{2\alpha} + k\frac{\pi}{\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$.

ÚLOHA 3.9. Vypočtěte
$$\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrand je definován pro $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Výrazy v integrandu upravme podle známých identit pro goniometrické funkce:
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x\\ &= -\int \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{\left(\cos\frac{x}{2}\right)'}{\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)'}{\sin\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Integrály na pravé straně jsou ve tvaru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x$ a tudíž lze aplikovat (3.2):
$$\begin{aligned}\int \frac{\left(\cos\frac{x}{2}\right)'}{\cos\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x &= \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad \text{pro } x \neq k\pi,\, k \in \mathbb{Z};\\ \int \frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)'}{\sin\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x &= \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| \quad \text{pro } x \neq 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$
Dostáváme, že na každém intervalu (α, β), neobsahujícím čísla $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, platí
$$\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$
kde C je libovolná konstanta.