

CVIČENÍ 4

Výpočet integrálu neurčitého. Substituce, integrace po částech

Vzorce

Substituce

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int f(x) dx \quad (4.1)$$

$$\int f(\phi(t)) d\phi(t) = \int f(x) dx \quad (4.2)$$

Substituce $x = \phi(t)$ zavádí novou proměnnou t a převádí úlohu výpočtu $\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$ na integraci $\int f(x) dx$.

Naopak, řešíme-li $\int f(x) dx$, lze hledat substituci tvaru $x = \phi(t)$, po níž upravený integrál $\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$ bude jednodušší. Prakticky substituci provádíme vyloučením x z integrandu i diferenciálu ($dx = \psi'(t) dt$).

K obdrženému výsledku aplikujeme zpětnou substituci (vyjádříme t přes x).

Integrace po částech

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

Úlohy

Aplikujme dle potřeby metodu integrace s pomocí nové proměnné a integraci po částech. Všude dále po výpočtu pak do výsledku doplníme integrační konstantu.

PŘÍKLAD 4.1. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Řešení. Je zřejmá substituce $\arcsin x = t$. Pak bude $dt = d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \overbrace{\arcsin x}^t \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}^{dt} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2.$$

PŘÍKLAD 4.2. Vypočtěme integrál

$$\int x 2^{3x^2} dx.$$

Řešení. Jelikož $(x^2)' = 2x$, v integrandu jedním z činitelů u dx je výraz, připomínající derivaci výrazu $3x^2$. Integrál tedy můžeme upravit takto:

$$\int x 2^{3x^2} dx = \frac{1}{6} \int 2^{3x^2} (3x^2)' dx = \frac{1}{6} \int 2^{3x^2} d(3x^2), \quad (4.3)$$

což odpovídá pravé straně substitučních vzorců (4.1), (4.2) $\int f(\phi(x)) \phi(x)' dx$ a $\int f(\phi(x)) d\phi(x)$ s volbou $\phi(x) = 3x^2$, $f(t) = 2^t$. Vzhledem k těmto vzorcům bude

$$\int x 2^{3x^2} dx = \frac{1}{6} \int 2^{3x^2} d(3x^2) = \frac{1}{6} \int 2^s ds = \frac{2^s}{6 \ln 2},$$

kde $s = \phi(x)$. Vrátime-li se v tomto výsledku k původní proměnné x s pomocí vztahu $s = 3x^2$, dostaneme

$$\int x 2^{3x^2} dx = \frac{2^{3x^2}}{6 \ln 2}. \quad (4.4)$$

Poznamenejme, že v praxi místo explicitní úpravy integrálu na tvar typu (4.3) je většinou pohodlněji postupovat poněkud jinak.

Podle předchozích úvah lze u daného integrálu očekávat, že účinnou bude substituce $3x^2 = s$. Vylučme tedy x z integrandu a diferenciálu s pomocí algebraických úprav: $3x^2 = s$, $ds = d(3x^2) = 6x dx$, $x dx = \frac{1}{6} ds$ a formálně dosadíme obdržené výrazy do integrálu:

$$\int x 2^{3x^2} dx = \int \overbrace{2^{3x^2}}^{2^s} \overbrace{x dx}^{\frac{1}{6} ds} = \int 2^s \cdot \frac{1}{6} ds = \frac{1}{6} \int 2^s ds = \frac{1}{6} \frac{2^s}{\ln 2},$$

což po dosazení (t. j. „substituci“ $s = 3x^2$) vede na výsledek (4.4). Výpočet, vykonaný výše, tento postup zcela odůvodňuje. Takto lze přechod k nové integrační proměnné provádět i obecně.

PŘÍKLAD 4.3. Vypočtěme integrál

$$\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx,$$

kde $a > 0$.

Řešení. Zavedeme-li novou proměnnou t s pomocí vztahu $a^2 - x^2 = t$, dostaneme $dt = -2x dx$ a proto bude $x dx = -\frac{1}{2} dt$,

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \overbrace{\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{t}} \overbrace{x dx}^{-\frac{1}{2} dt} = \int \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2} dt\right) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \sqrt{t^3} = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.4. Vypočtěme integrál

$$\int \sin^3 x dx.$$

Řešení. V integrandu je lichá mocnina sinu. Jelikož $\sin^3 x dx = \sin^2 x \sin x dx$, přičemž $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a $(\cos x)' = -\sin x$, nabízí se substituce $\cos x = t$. Dostaneme $d(\cos x) = -\sin x dx = dt$, $\sin x dx = -dt$,

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int \overbrace{(1 - \cos^2 x)}^{1-t^2} \overbrace{\sin x dx}^{-dt} = \int (t^2 - 1) dt \\ &= \frac{t^3}{3} - t = \frac{(\cos x)^3}{3} - \cos x. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.5. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

Řešení. Integrand obsahuje jen členy e^x , přičemž e^x je v čitateli a $(e^x)' = e^x$. Je vhodné udělat substituci $e^x = t$. Bude $de^x = e^x dx = dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx &= \int \overbrace{\frac{1}{e^x + 1}}^{\frac{1}{t+1}} \overbrace{e^x dx}^{dt} = \int \frac{1}{t+1} dt = \int \frac{1}{t+1} d(t+1) = \ln |t+1| \\ &= \ln(e^x + 1). \end{aligned}$$

Jinak bychom mohli položit $e^x + 1 = s$; pak bude $d(e^x + 1) = e^x dx = ds$,

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \overbrace{\frac{1}{e^x + 1}}^{\frac{1}{s}} \overbrace{e^x dx}^{ds} = \int \frac{1}{s} ds = \ln |s| = \ln(e^x + 1).$$

PŘÍKLAD 4.6. Vypočtěme

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

Řešení. Jelikož $(\cos x)' = -\sin x$, lze integrál upravit takto:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{\cos x} (-\sin x) dx = - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \\ &= \ln |\cos x|. \end{aligned}$$

Poslední krok jsme vykonali zavedením do diferenciálu (t. j. využili jsme substitučního vzorce ve tvaru (4.2)). Jinak bychom mohli explicitně položit $\cos x = s$ a vypočíst $ds = d(\cos x) = -\sin x dx$, počemž obdržíme $\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = \int \frac{1}{s} ds = \ln |s| = \ln |\cos x|$. \square

PŘÍKLAD 4.7. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Řešení. Substituce $e^x = t$ dává $de^x = e^x dx = dt$ a

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{e^{2x} + 1} \overbrace{e^x dx}^{dt} = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} e^x.$$

PŘÍKLAD 4.8. Vypočtěme integrál

$$\int x^3 e^{-x^2} dx.$$

Řešení 4.8.1. Integrandem je součin x^3 a e^{-x^2} , přičemž integrovat e^{-x^2} zvlášť nedovedeme. Chceme-li integrovat po částech, pravděpodobně musíme e^{-x^2} derivovat a x^3 pak integrovat:

$$\int \overbrace{x^3}^{v'} \overbrace{e^{-x^2}}^u dx = \frac{v}{4} \overbrace{e^{-x^2}}^u - \int \frac{v}{4} \overbrace{(-2xe^{-x^2})}^{u'} dx.$$

Toto však vede na integrál $\int x^5 e^{-x^2} dx$, jenž není nikterak jednodušší než integrál původní. Je tedy potřeba hledat jinou cestu.

Můžeme si všimnout, že $d(x^2) = 2x dx$, $x^3 e^{-x^2} dx = x^2 e^{-x^2} x dx$ a tudíž se nabízí substituce $x^2 = t$. Potom dostáváme $dt = 2x dx$, $x dx = \frac{1}{2} dt$,

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int \overbrace{x^2}^t \overbrace{e^{-x^2}}^{e^{-t}} \overbrace{x dx}^{\frac{1}{2} dt} = \frac{1}{2} \int t e^{-t} dt. \quad (4.5)$$

Tento integrál lze snadno vypočíst metodou *per partes* s $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t}$. Obdržíme $v(t) = \int e^{-t} dt = -\int e^{-t} d(-t) = -e^{-t}$ (implicitní substituce $-t = s$, $ds = -dt$) a

$$\int \overbrace{t}^u \overbrace{e^{-t}}^{v'} dt = \overbrace{t}^u \overbrace{(-e^{-t})}^v - \int \overbrace{1}^{u'} \cdot \overbrace{(-e^{-t})}^v dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{t+1}{e^t}.$$

Po zpětné substituci pak dostaneme

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{x^2 + 1}{2e^{x^2}}.$$

Řešení 4.8.2. Při zpětném pohledu na úpravu (4.5) si můžeme všimnout, že je $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ (substituce $-x^2 = s$, $-2x dx = ds$, $x dx = -\frac{1}{2} ds$) a tudíž vzniká

myšlenka integrovat po částech takto:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x^2} dx &= \int \overbrace{x^2}^u \overbrace{x e^{-x^2}}^{v'} dx = \overbrace{x^2}^u \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) - \int \overbrace{2x}^{u'} \overbrace{\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right)}^v dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.9. Vypočtěme

$$\int x^2(x-1)^5 dx.$$

Řešení. Integrandem je polynom stupně 7 a tudíž jeho integrace teoreticky žádné potíže nečiní. Algebraické úpravy při přímé integraci však vyžadují jisté úsilí ($(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + \dots$). Práci si můžeme usnadnit, zavedeme-li novou proměnnou $t = x - 1$, čímž „prohodíme“ členy s 2. a 5. mocninami. Pak bude $dt = dx$, $x = t + 1$,

$$\begin{aligned}\int x^2(x-1)^5 dx &= \int (t+1)^2 t^5 dt = \int (t^2 + 2t + 1) t^5 dt = \int t^7 dt + 2 \int t^6 dt + \int t^5 dt \\ &= \frac{t^8}{8} + \frac{2}{7} t^7 + \frac{t^6}{6} = t^6 \left(\frac{1}{8} t^2 + \frac{2}{7} t + \frac{1}{6} \right) \\ &= (x-1)^6 \left(\frac{1}{8} (x-1)^2 + \frac{2}{7} (x-1) + \frac{1}{6} \right).\end{aligned}$$

Výsledek dle potřeby můžeme dodatečně upravit.

PŘÍKLAD 4.10. Vypočtěme

$$\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$$

Řešení. V součinu $x^2 e^{\frac{x}{2}}$ oba dva členy lze snadno integrovat i derivovat, avšak u x^2 se po zderivování mocnina sníží. Integrujme tedy po částech tak, aby byl zderivován člen x^2 :

$$\int \overbrace{x^2}^u \overbrace{e^{\frac{x}{2}}}^{v'} dx = \overbrace{x^2}^u \cdot \overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^v - \int \overbrace{2x}^{u'} \overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^v dx = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4 \int x e^{\frac{x}{2}} dx.$$

Zde jsme zvolili $v'(x) = e^{\frac{x}{2}}$ a tudíž

$$v(x) = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \int e^{\frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Podobným způsobem v

$$\int x e^{\frac{x}{2}} dx$$

taktéž integrujme po částech:

$$\begin{aligned}\int \overbrace{x}^u \overbrace{e^{\frac{x}{2}}}^{v'} dx &= \overbrace{x}^u \cdot \overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^v - \int \overbrace{1}^{u'} \cdot \overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^v dx = 2x e^{\frac{x}{2}} - 2 \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2x e^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} \\ &= 2(x-2) e^{\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Pak dostaneme

$$\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4 \cdot 2(x-2) e^{\frac{x}{2}} = 2(x^2 - 4x + 8) e^{\frac{x}{2}}.$$

PŘÍKLAD 4.11. Vypočtěme

$$\int x^3 (1 - 2x^2)^8 dx.$$

Řešení. Situace je podobná příkladu 4.9. Bezprostřední integrace polynomu stupně 19 je zdlouhavá, proto raději provedeme substituci $1 - 2x^2 = t$. Dostaneme $-4x dx = dt$, $x dx = -\frac{1}{4} dt$, $x^2 = \frac{1}{2}(1 - t)$,

$$\begin{aligned} \int x^3 (1 - 2x^2)^8 dx &= \int \overbrace{x^2}^{\frac{1}{2}(1-t)} \overbrace{(1 - 2x^2)^8}^{t^8} \overbrace{x dx}^{-\frac{1}{4} dt} = -\frac{1}{8} \int (1 - t) t^8 dt = -\frac{1}{8} \int (t^8 - t^9) dt \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^{10}}{10} \right) = \frac{t^9}{8} \left(\frac{1}{9} - \frac{t}{10} \right) = \frac{t^9}{720} (10 - 9t) \\ &= \frac{(1 - 2x^2)^9}{720} (10 - 9(1 - 2x^2)) = \frac{1}{720} (1 - 2x^2)^9 (1 + 18x^2). \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.12. Vypočtěme

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

Řešení. Integrandem je součin výrazů $\ln x$ a $\frac{1}{\sqrt{x}}$, z nichž první po zderivování nabývá tvaru, podobného druhému činiteli (mocniný výraz). Integrujme tedy po částech takto:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \int \overbrace{\ln x}^u \overbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{v'} dx = \overbrace{\ln x}^u \overbrace{(2\sqrt{x})}^v - \int \overbrace{\frac{1}{x}}^{u'} \overbrace{(2\sqrt{x})}^v dx = 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 4 \int d(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.13. Vypočtěme

$$\int \frac{x}{\cos^2 5x} dx.$$

Řešení. Můžeme si všimnout, že $\frac{1}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5}(\operatorname{tg} 5x)'$. Integrujme po částech:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 5x} dx &= \int \overbrace{x}^u \overbrace{\frac{1}{\cos^2 5x}}^{v'} dx = \overbrace{x}^u \overbrace{\left(\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x\right)}^v - \int \overbrace{1}^{u'} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x\right)}^v dx \\ &= \frac{x}{5} \operatorname{tg} 5x - \frac{1}{5} \int \operatorname{tg} 5x dx. \end{aligned}$$

Dle výsledku příkladu 4.6 platí

$$\int \operatorname{tg} 5x dx = \frac{1}{5} \int \operatorname{tg} 5x d(5x) = \frac{1}{5} \ln |\cos 5x|$$

a tudíž

$$\int \frac{x}{\cos^2 5x} dx = \frac{x}{5} \operatorname{tg} 5x - \frac{1}{25} \ln |\cos 5x|.$$