

CVIČENÍ 6

Integrál racionální lomené funkce a některé podobné integrály

Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Integrály, v nichž je integrand lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x) dx, \quad (6.1)$$

kde $R(u, v)$ je racionálně lomená podle u a v , lze s využitím tzv. univerzální trigonometrické substituce

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (6.2)$$

vždy převést na integrál racionální lomené funkce anebo v určitých případech i vypočíst s pomocí elementárních úprav integrandu.

Univerzální trigonometrická substituce

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{t^2+1} dt. \quad (6.3)$$

Speciální případy

Užití univerzální substituce (6.2) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem a proto je vhodné se napřed zamyslet, zda není možné integrál vypočíst snadněji. Často je užitečná následující rada.

ÚVAHA 6.1. Je-li integrál ve tvaru (6.1), kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů, mající jednu z vlastností:

$$R(-u, v) = -R(u, v), \quad R(u, -v) = -R(u, v), \quad R(-u, -v) = R(u, v) \quad (6.4)$$

pro všechna (u, v) , pak lze pro integraci využít jedné ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$ resp. $t = \operatorname{tg} x$.

Substituce, doporučená úvahou 6.1, může být v praxi vhodnější než univerzální trigonometrická substituce.

PŘÍKLAD 6.2. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Řešení 6.2.1. Po úpravě lze využít substituce $\cos x = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{\sin x} \frac{\sin x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\ &= - \int \frac{1}{1 - \cos^2 x} d(\cos x) = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t - 1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t - 1| - \frac{1}{2} \ln |t + 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right|. \end{aligned}$$

Řešení 6.2.2. Po úpravě lze využít substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \ln |t| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 6.3. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sin x + 1} dx.$$

Řešení. Dle vzorce $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ bude

$$\int \frac{1}{\sin x + 1} dx = \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} dx.$$

Pak $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} dx &= 2 \int \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2 + 2t + 1} dt = 2 \int \frac{1}{(t + 2)^2} dt = 2 \int \frac{1}{(t + 2)^2} d(t + 2) \\ &= -\frac{2}{t + 2} = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 6.4. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 3} dx.$$

Řešení. Položme $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; dle (6.3) bude

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 3} dx &= \int \frac{1}{2 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \frac{2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{1}{4t-1+t^2+3(t^2+1)} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{4t-1+t^2+3(t^2+1)} dt = \int \frac{1}{2t^2+2t+2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} d\left(t+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} 2 \operatorname{arctg} 2 \left(t+\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 6.5. Vypočtěme

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + 1} dx.$$

Řešení 6.5.1. Elementární úpravou obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + 1} dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x + 1} dx + \int \frac{\cos x}{\cos x + 1} dx \\ &= - \int \frac{(\cos x + 1)'}{\cos x + 1} dx + \int \frac{\cos x + 1 - 1}{\cos x + 1} dx \\ &= -\ln(1 + \cos x) + \int dx - \int \frac{1}{\cos x + 1} dx. \end{aligned}$$

Ježto $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, bude $\cos 2x + 1 = 2 \cos^2 x$ a tudíž

$$\int \frac{1}{\cos x + 1} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Pak dostaneme

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + 1} dx = x - \ln(1 + \cos x) - \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Řešení 6.5.2. Položíme-li $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, bude

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + 1} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \frac{2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{2t+1-t^2}{(2t+t^2+1)(t^2+1)} dt \\ &= -2 \int \frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2(t^2+1)} dt, \end{aligned}$$

což vyžaduje rozkladu na několik částečných zlomků. Preferujeme tedy předešlé řešení. □

PŘÍKLAD 6.6. Vypočtěme integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx.$$

Řešení 6.6.1. Využití univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ dle vzorců (6.3) vede na integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{8t^3}{(1+t^2)^3} \frac{2}{t^2+1} dt = 16 \int \frac{t^3(1-t^2)^2}{(1+t^2)^6} dt.$$

Dostáváme tedy integrál neryze lomené funkce, přičemž i po vyčlenění ryze lomené části zůstává úloha výpočetně náročnou jakožto integrace parciálního zlomku s vysokým stupněm jmenovatele bez reálných kořenů. Zkusme proto raději najít jinou cestu.

Řešení 6.6.2. Daný integrál má tvar (6.1) s $R(u, v) = u^2 v^3$. Funkce R je lichá podle v a tudíž dle úvahy 6.1 použijme substituci $t = \cos x$. Dostaneme $dt = -\sin x dx$, $\sin x dx = -dt$,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^3 x dx &= \int \cos^2 x \sin^2 x \overbrace{\sin x dx}^{-dt} = - \int t^2 (1-t^2) dt = \int t^4 dt - \int t^2 dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x, \end{aligned}$$

což je výrazně jednodušší než příslušná integrace v řešení 6.6.1. □

PŘÍKLAD 6.7. Vypočtěme

$$\int \sin^2 x \cos^5 x dx.$$

Řešení. Integrand obsahuje lichou mocninu výrazu $\cos x$. Substituce $\sin x = t$, $dt = \cos x dx$,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int t^2 (t - t^2)^2 dt = \int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{7} t^7 = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 6.8. Vypočtěme

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx.$$

Řešení. Integrand $\operatorname{tg}^4 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}$ se nemění při současném nahrazení $\cos x$ a $\sin x$ výrazy $-\cos x$ a $-\sin x$. Položme $\operatorname{tg} x = t$. Bude $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = (1 + t^2) dx$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \frac{t^4}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{t^4}{-t^2 - t^2} \left| \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \right. \\ &= \frac{-t^2}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Obvyklým způsobem pak dostaneme $\int \operatorname{tg}^4 x dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

PŘÍKLAD 6.9. Vypočtěme

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{3x} + 1} dx.$$

Řešení. Položíme-li $e^x = t$, bude $dt = e^x dx$, $dx = \frac{1}{t} dt$,

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{3x} + 1} dx = \int \frac{t^2}{t^3 + 1} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)} dt.$$

Rozklad na částečné zlomky bude ve tvaru $\frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}$, po výpočtu

$$\frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{t+1}{3(t^2-t+1)} - \frac{1}{3(t+1)}$$

a tudíž

$$\int \frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+1} dt. \quad (6.5)$$

Integrace částečného zlomku II. typu dává

$$\begin{aligned} \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t-1+3}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1} dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Po dosazení do (6.5) dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)} dt &= \frac{1}{6} \ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{3} \ln|t+1| \\ &= \frac{1}{6} \ln(e^{2x} - e^x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2e^x - 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{3} \ln(e^x + 1). \end{aligned}$$