CVIČENÍ 7

Integrály, jež se převádí na integrál racionální lomené funkce

Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$

Integrály, v nichž je integrand lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.1}$$

kde $R(u, v)$ je racionálně lomená podle u a v, lze s využitím tzv. univerzální trigonometrické substituce

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \tag{7.2}$$

vždy převést na integrál racionální lomené funkce.

Univerzální trigonometrická substituce

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t. \tag{7.3}$$

Speciální případy

Užití univerzální substituce (7.2) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem a proto je vhodné se napřed zamyslet, zda není možné integrál vypočíst snadněji. Často je užitečná následující rada.

ÚVAHA 7.1. Je-li integrál ve tvaru (7.1), kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů, mající jednu z vlastností:

$$R(-u, v) = -R(u, v), \quad R(u, -v) = -R(u, v), \quad R(-u, -v) = R(u, v) \tag{7.4}$$

pro všechna (u, v), pak lze pro integraci využit jedné ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$ resp. $t = \operatorname{tg} x$.

Substituce, doporučená úvahou 7.1, může být v praxi vhodnější než univerzální trigonometrická substituce.

PŘÍKLAD 7.2. Vypočtěme

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substituce $\sin x = t$, $\mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^5 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^2 \,\mathrm{d}(\sin x)\\ &= \int t^2 (t-t^2)^2 \,\mathrm{d}t = \int t^2(1-2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t = \int (t^2 - 2t^4 + t^6)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x.\end{aligned}$$

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) \mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tohoto druhu lze převést na integrál racionální lomené funkce zavedením nové proměnné t s pomocí substituce

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{7.5}$$

Je-li v integrandu několik výrazů typu $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{q_1}$, $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{q_2}$, ..., kde $q_1, q_2, \dots$ jsou racionální čísla, lze rovněž využít substituce (7.5), v níž zvolíme za m společný jmenovatel zlomků q_1, q_2, ...

Speciálním případem je integrál tvaru $\int R\left(x, \sqrt[m]{\alpha x + \beta}\right)\mathrm{d}x$, kde lze položit $\alpha x + \beta = t^m$.

PŘÍKLAD 7.3. Vypočtěme $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[5]{x+1}}$.

Řešení. Položme $x + 1 = t^5$. Pak bude $\mathrm{d}x = 5t^4\,\mathrm{d}t$, $x = t^5 - 1$,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[5]{x+1}} = 5\int \frac{\left(t^5-1\right)t^4}{t+1}\,\mathrm{d}t,$$

což je integrál neryze lomené funkce. Dělením polynomů $t^9 - t^4$ a $t+1$ dostáváme

$$\frac{t^9-t^4}{t+1} = t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{t+1}$$

a tudíž

$$\int \frac{\left(t^5-1\right)t^4}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|t+1|.$$

Pro obdržení výsledku poslední výraz vynásobíme pěti a zpětně dosadíme $t = (x+1)^{\frac{1}{5}}$. □

PŘÍKLAD 7.4. Vypočtěme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $x = t^6$. Bude $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{t^3}{t^2+1}t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 6\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1)\,\mathrm{d}x + 6\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t,$$

protože

$$
\begin{array}{l|l}
t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2}
-t^8-t^6 & t^6-t^4+t^2-1 \\ \cline{1-1}
-t^6 & \\
t^6+t^4 & \\ \cline{1-1}
t^4 & \\
-t^4-t^2 & \\ \cline{1-1}
-t^2 & \\
t^2+1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

Vychází

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5} + 2\sqrt{x} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\operatorname{arctg}\left(x^{\frac{1}{6}}\right). \quad \square$$

PŘÍKLAD 7.5. Vypočtěme

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt[3]{6x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení 7.5.1. Substituce $6x+1=t$, $6\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t$; $2x=\frac{1}{3}(t-1)$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{\sqrt[3]{6x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{3}(t-1)+5}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{18}\int \frac{t+14}{t^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{18}\int t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t + \frac{7}{9}\int t^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{18}\int t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t + \frac{7}{9}\int t^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{18}\cdot\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{9}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{1}{30}t^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{6}t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{30}(6x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{6}(6x+1)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
$$

Řešení 7.5.2 (doporučené). Zavedeme-li proměnnou s vztahem $6x+1=s^3$, bude $6\,\mathrm{d}x=3s^2\,\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}s^2\,\mathrm{d}s$, $2x=\frac{1}{3}(s^3-1)$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{\sqrt[3]{6x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{3}(s^3-1)+5}{s}\frac{1}{2}s^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{6}\int (s^3+14)s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{6}\int (s^4+14s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}s^5+7s^2\right) = \frac{1}{30}(6x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{6}(6x+1)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 7.6. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substituce $x=t^6$, $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t^3\left(t^2+1\right)}6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = 6t - 6\operatorname{arctg} t = 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right).
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 7.7. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substituce $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$, $\frac{1+x}{1-x} = t^2$; $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $1+x = \frac{2t^2}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+1}{2t^2}\cdot t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\operatorname{arctg} t$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Integrály $\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x})\,\mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tvaru

$$\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x$$

lze vypočíst zavedením nové proměnné $t = e^{\alpha x}$. Podobným způsobem lze upravit integrál tvaru

$$\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x})\,\mathrm{d}x,$$

v němž R je racionální lomená funkce n proměnných a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou celá čísla, položíme-li $t = e^x$. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ soudělná, je vhodné položit $t = e^{\alpha x}$, kde α je největší společný dělitel těchto čísel.

PŘÍKLAD 7.8. Vypočtěme

$$\int \frac{e^{6x}+3}{e^{3x}+6}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položíme-li $t = e^{3x}$ (neboli, což je totéž, $x = \frac{1}{3}\ln t$), bude $\mathrm{d}x = \frac{1}{3t}\,\mathrm{d}t$ a tudíž

$$\int \frac{e^{6x}+3}{e^{3x}+6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{t^2+3}{t+6}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{t^2+3}{t\,(t+6)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \left(1 - 3\frac{2t-1}{t\,(t+6)}\right)\mathrm{d}t,$$

protože $\frac{t^2+3}{t^2+6t} = 1 + \frac{3-6t}{t^2+6t}$. Rozkladem $\frac{2t-1}{t(t+6)}$ na částečné zlomky je $\frac{3t-1}{t(t+9)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{t} + \frac{13}{6}\frac{1}{t+6}$ a proto $\int \frac{2t-1}{t(t+6)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\ln|t| + \frac{13}{6}\ln|t+6|$. Po výpočtu a dosazení $t = e^{3x}$ dostaneme

$$\int \frac{e^{9x}+3}{e^{3x}+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{13}{6}\ln|t+6| = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}x - \frac{13}{6}\ln\left(e^{3x}+6\right).$$

Vypočtěme některé *určité* integrály podobných typů. Připomeňme si věty o integrací s pomocí nové proměnné.

VĚTA 7.9. Má-li funkce ϕ na (a,b) spojitou derivaci, pro každou spojitou funkci f platí

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.6}$$

Vztah (7.6) znamená, že v případě integrálu $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ se jedná, vlastně, o integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ v mezích $\phi(a)$ a $\phi(b)$. Novou proměnnou t tedy zavadíme vztahem $t = \phi(x)$.

Metodu substituce občas používáme v alternativní podobě, a sice tak, že se vzorec (7.6) přečte „v opačném směru“.

VĚTA 7.10. Nechť $[\alpha, \beta]$ a $[a, b]$ jsou uzavřené intervaly a funkce $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je taková, že $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$. Má-li funkce ψ na $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci, pak pro každou spojitou funkci f platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(s))\psi'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{7.7}$$

V tomto případě novou proměnnou s zavadíme implicitně s pomocí vztahu $\psi(s) = x$.

Poznámka 7.11 (o praktickém využití metody substituční). V praxi zavedení nové proměnné v určitém integrálu provádíme tak, že — po ověření splnění předpokladů — do integrandu a diferenciálu dosazujeme $t = \phi(x)$ resp. $x = \psi(s)$ a oboje vyjadřujeme s pomocí nové proměnné. Dále výpočtem hodnot, odpovídajících koncovým bodům původního integračního intervalu, zjistíme meze, ve kterých se mění nová proměnná. Obdržíme pak nový integrál, jehož hodnota je shodná s hodnotou původního integrálu (přičemž není potřeba zpětné substituce).

PŘÍKLAD 7.12. Vypočtěme

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 4 \Rightarrow t = 2$;

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{1+t} 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^2 \mathrm{d}t - \int_0^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= 2\left(2 - [\ln(t+1)]_0^2\right) = 4 - 2\ln 3.$$

PŘÍKLAD 7.13. Vypočtěme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. V integrandu je lichá mocnina výrazu $\sin x$. Je vhodné zavést novou proměnnou vztahem $\cos x = t$, $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$; meze budou: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

PŘÍKLAD 7.14. Vypočtěme

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Je zřejmé, že zde je vhodné položit $\ln x = t$, pak bude $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; meze budou: $x = 1 \Rightarrow t = 0$, $x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$;

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$