CVIČENÍ 8

Geometrické aplikace integrálu určitého

PŘÍKLAD 8.1. Vypočtěme obsah plochy S útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3$.

Řešení. Platí $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Graf této funkce je znázorněn na obrázku 8.1. Funkce na $[0,3]$ střídá znaménko v bodech 1, 2 a 3, přičemž 3 je již krajní bod intervalu. Funkce je kladná na intervalu $(1,2)$ a záporná na $(0,1)$ a $(2,3)$. Požadovaný obsah je součtem obsahů třech barevně vyznačených obrazců. Pro $1 \le x \le 2$ je $f(x) \ge 0$, obsah plochy odpovídajícího obrazce je roven $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $0 \le x \le 1$ a $2 \le x \le 3$ je $f(x) \le 0$ a tudíž obsahy odpovídajících obrazců jsou $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-f(x))\,\mathrm{d}x$, $\int_2^3 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_2^3 (-f(x))\,\mathrm{d}x$. Proto je obsah plochy

$$S = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{4}.$$

Pro výpočet je vhodné zapsat integrál neurčitý

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x.$$

Pak bude $S = -[F(x)]_0^1 + [F(x)]_1^2 - [F(x)]_2^3 = -F(1) + F(0) + F(2) - F(1) - F(3) + F(2) = -2F(1) + 2F(2) - F(3)$. Stačí tedy jen vypočíst $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$. □

PŘÍKLAD 8.2. Vypočtěme obsah plochy S útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a přímkami $y = \frac{1}{2}$, $x = 4$.

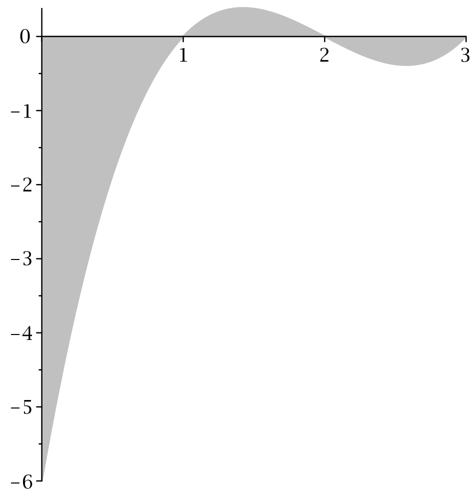
Řešení. Sestrojme graf (obrázek 8.2). Přímka $y = \frac{1}{2}$ protíná křivku $y = \sqrt{x}$ v bodě $\frac{1}{4}$. Obsah plochy bude

$$S = \int_{\frac{1}{4}}^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^4 - \frac{1}{2}[x]_{\frac{1}{4}}^4 = \frac{2}{3}\left(8 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{27}{8}.$$

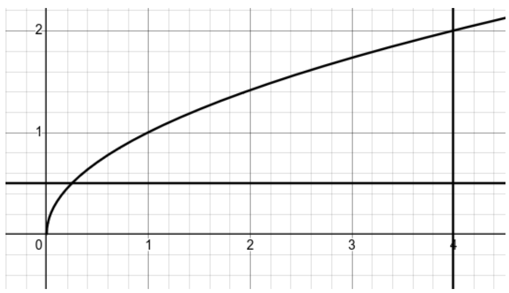
PŘÍKLAD 8.3. Vypočtěme obsah plochy S uzavřeného geometrického útvaru, ohraničeného grafy funkcí $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ v intervalu $(-1, 3)$.

Řešení. Po načrtnutí schematického grafu (viz obrázek 8.3) zjistíme, že se potřebný útvar určuje kořeny rovnice

$$(x-1)^2 = \frac{x}{2} + 1 \tag{8.1}$$



OBRÁZEK 8.1



OBRÁZEK 8.2

nebo, což je totéž,

$$x^2 - \frac{5}{2}x = 0. \tag{8.2}$$

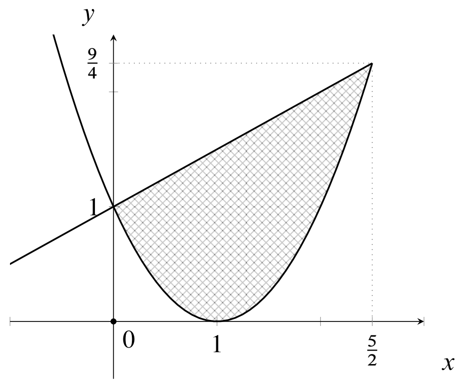
Kořeny rovnice (8.2) jsou 0 a $\frac{5}{2}$. V intervalu $(0, \frac{5}{2})$ leží graf funkce g nad grafem funkce f. Proto obsah jimi ohraničené plochy je

$$\int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{x}{2} + 1\right) \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{5}{2}} x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 \,\mathrm{d}(x-1)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} - \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^{\frac{5}{2}} = \frac{65}{16} - \frac{35}{24} = \frac{125}{48}.$$

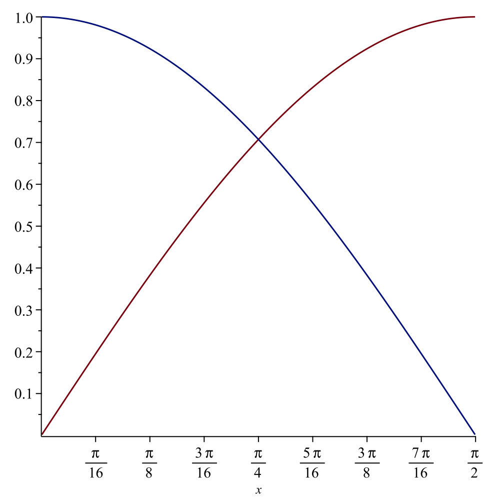
PŘÍKLAD 8.4. Vypočtěme obsah plochy S útvaru ohraničeného grafy $y = \sin x$, $y = \cos x$ a přímkou $y = 0$ při $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení. Sestrojme graf (obrázek 8.4). Křivky $y = \sin x$, $y = \cos x$ se v daném intervalu protínají v jeho středu (t. j. při $x = \frac{\pi}{4}$). Dle souměrnosti obsah plochy bode

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \,\mathrm{d}x = -\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$



OBRÁZEK 8.3. Plocha ohraničená grafy $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.



OBRÁZEK 8.4

PŘÍKLAD 8.5. Vypočtěme objem rotačního tělesa vzniklého otáčením grafů $y = 4x - x^2$, $y = x$ podle vodorovné osy.

Řešení. Body průniku křivek $y = 4x - x^2$, $y = x$ jsou $x = 0$, $x = 3$;

$$V = \pi \int_0^3 ((4x - x^2))\,dx - \pi \int_0^3 x^2\,dx = \pi \int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx = \frac{108}{5}\pi.$$

PŘÍKLAD 8.6. Vypočtěme délky oblouku křivky o rovnicí $y = \ln(\sin x)$, odpovídajícího hodnotám $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Řešení. Pro $f(x) = \ln(\sin x)$ je $f'(x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{cotg} x$. Proto délka oblouku křivky je

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\sin x\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos^2 x}\sin x\,dx.$$

V posledním integrálu je vhodné zavést novou proměnnou vztahem $\cos x = t$; pak $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$. Dolní a horní meze pro t budou $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ a $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Dostaneme

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos^2 x} \sin x \,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Rozkladem výrazu $\frac{1}{1-t^2}$ na částečné zlomky je $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$ a tudíž

$$l = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$