CVIČENÍ 9

Nevlastní integrály

PŘÍKLAD 9.1. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Uvažujme $\int_0^b \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ pro $b > 0$. Jelikož $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2)$, po substituci $x^2 = t$ pro novou proměnnou t dostaneme meze 0, b^2 a bude

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^b \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\big(x^2\big) = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,[\operatorname{arctg} t]_0^{b^2} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}(b^2) - 0\Big) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(b^2).\end{aligned}$$

Vodorovná přímka $y = \frac{\pi}{2}$ je asymptotou funkce $x \to \operatorname{arctg} x$ ve směru $+\infty$ a tudíž

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(b^2) = \frac{\pi}{4}.$$

Integrál $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ tedy konverguje a má hodnotu $\frac{\pi}{4}$. □

PŘÍKLAD 9.2. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Uvažujme integrál $\int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ pro $b > 0$ a zaveďme v něm novou proměnnou $t = x^2 + 1$. Bude $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$. Meze pro t budou 1 a $b^2 + 1$. Dostaneme

$$\int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{b^2+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \Big[\sqrt{t}\Big]_1^{b^2+1} = \sqrt{b^2+1} - 1.$$

Jelikož $\lim_{b\to+\infty} \sqrt{b^2+1} = +\infty$, je

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Integrál tedy diverguje. □

PŘÍKLAD 9.3. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Pro libovolné $b > 0$ je

$$\int_0^b \sin x \, \mathrm{d}x = -[\cos x]_0^b = -\cos b + 1.$$

Limita $\lim_{b\to+\infty} \cos b$ neexistuje a tudíž neexistuje ani $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \sin x \, \mathrm{d}x$. Integrál $\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$ tedy nekonverguje. □

PŘÍKLAD 9.4. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Tento integrál konverguje, konvergují-li $\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x$, $\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x$ při nějakém c; pak by bylo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x$.

Uvažujme $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x$, $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+3^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{3}\right]_0^b = \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{b}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Pak dle souměrnosti (integrujeme sudou funkci)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}.$$

Dostaneme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. □

PŘÍKLAD 9.5. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}$ je neomezená v okolí bodu $\frac{3}{4}$. Jedná se o nevlastní integrál II. druhu. Na všech intervalech $\left[\frac{3}{4}+\varepsilon, 1\right]$, kde ε je malé kladné číslo, je tato funkce spojitá a tudíž existují integrály $\int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} \, \mathrm{d}x$.

Pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} \, \mathrm{d}x$. Po substituci $t = 3-4x$, $\mathrm{d}t = -4\,\mathrm{d}x$ dostaneme $\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$ a dolní a horní meze pro novou proměnnou: $3 - 4(\frac{3}{4}+\varepsilon) = -4\varepsilon$ a $3-4=-1$. Bude

$$\int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \int_{-4\varepsilon}^{-1} \frac{1}{\sqrt[5]{t}} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{4} \int_{-4\varepsilon}^{-1} t^{-\frac{1}{5}} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \left[t^{\frac{4}{5}}\right]_{-4\varepsilon}^{-1} = -\frac{5}{16} \left(1 - (4\varepsilon)^{\frac{4}{5}}\right).$$

Jelikož $\lim_{\varepsilon\to0+} \varepsilon^{\frac{4}{5}} = 0$, dostaneme

$$\lim_{\varepsilon\to0+} \int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} \, \mathrm{d}x = -\frac{5}{16}.$$

Integrál tedy konverguje a platí $\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{16}$. $\square$

PŘÍKLAD 9.6. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ je neomezená v okolí bodu 1, jedná se o nevlastní integrál II. druhu. Uvažujme $\int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, kde $b < 1$, a vykonejme substituci $1 - x^2 = t$, $\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x$; meze pro t budou 1 a $1 - b^2$:

$$\int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^{1-b^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1-b^2} \mathrm{d}\sqrt{t} = -\left[\sqrt{t}\right]_1^{1-b^2} = 1 - \sqrt{1-b^2}.$$

Pak snadno dostáváme

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1-}\int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 1 - \lim_{b\to 1-}\sqrt{1-b^2} = 1,$$

tedy integrál $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ konverguje. $\square$

PŘÍKLAD 9.7. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}$ je neomezená v okolí bodu 1, jedná se o nevlastní integrál II. druhu. Pro malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x$:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}(1-x) = 2\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{1-\varepsilon} = 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - 1\right).$$

Avšak $\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = +\infty$, integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x$ tedy diverguje. $\square$

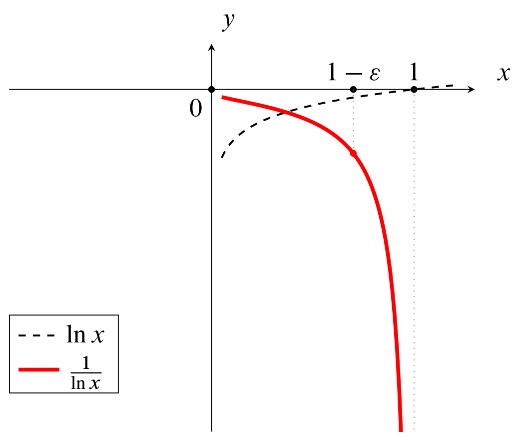
PŘÍKLAD 9.8. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2 x}$ je neomezená v okolí bodu 0, jedná se o nevlastní integrál II. druhu. Pro malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_\varepsilon^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$ a zaveďme v něm novou proměnnou $t = \ln x$. Bude $\mathrm{d}t = x^{-1}\,\mathrm{d}x$, meze pro t budou $\ln\varepsilon$ a $\ln e^{-1} = -1$. Dostaneme

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln\varepsilon}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln\varepsilon}^{-1} = -\left[t^{-1}\right]_{\ln\varepsilon}^{-1} = 1 - \frac{1}{\ln\varepsilon}.$$

Při $\varepsilon \to 0+$ je $\ln\varepsilon \to -\infty$ a tudíž $\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\ln\varepsilon} = 0$. Integrál tedy konverguje a platí $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = 1$. $\square$



OBRÁZEK 9.1

PŘÍKLAD 9.9. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln^3 x} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{x \ln^3 x}$ je neomezená v okolí bodu 1, jedná se o nevlastní integrál II. druhu.

Pro malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x \ln^3 x} \,\mathrm{d}x$ a zaveďme v něm novou proměnnou $t = \ln x$. Bude $\mathrm{d}t = x^{-1} \,\mathrm{d}x$, meze pro t budou $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ a $\ln(1-\varepsilon)$. Dostaneme

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x \ln^3 x} \,\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln(1-\varepsilon)} \frac{1}{t^3} \,\mathrm{d}t = \int_{-\ln 2}^{\ln(1-\varepsilon)} t^{-3} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \left[t^{-2}\right]_{-\ln 2}^{\ln(1-\varepsilon)} = \frac{1}{\ln^2 2} - \frac{1}{\ln^2(1-\varepsilon)}.$$

Při $\varepsilon \to 0+$ bude $\ln(1-\varepsilon) \to 0$, přičemž $\ln(1-\varepsilon) < 0$, neboť pro malé kladné ε je $\ln(1-\varepsilon)$ záporné vzhledem k tomu, že $1-\varepsilon < 1$. Proto $\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\ln(1-\varepsilon)} = -\infty$ (viz obrázek 9.1) a tudíž $\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\ln^2(1-\varepsilon)} = +\infty$.

Integrál $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln^3 x} \,\mathrm{d}x$ tedy diverguje. □

PŘÍKLAD 9.10. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{-x} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Pro $a < 0$ uvažujme $\int_a^0 x e^{-x} \,\mathrm{d}x$ a integrujme po částech:

$$\int_a^0 x e^{-x} \,\mathrm{d}x = \int_a^0 \overbrace{x}^{u}\, \overbrace{e^{-x}}^{v'} \,\mathrm{d}x = -\left[x e^{-x}\right]_a^0 + \int_a^0 e^{-x} \,\mathrm{d}x$$
$$= a e^{-a} - \left[e^{-x}\right]_a^0 = a e^{-a} - 1 + e^{-a} = (a+1) e^{-a} - 1.$$

Při $a \to -\infty$ bude $e^{-a} \to +\infty$, $(a+1)e^{-a} \to -\infty$ (při záporném a s velkým $|a|$ je $e^{-a} = e^{|a|}$ a násobí se záporným číslem $a+1$, přičemž $-a = |a| \to +\infty$). Dostáváme $\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 x e^{-x} \,\mathrm{d}x = -\infty$. Integrál $\int_{-\infty}^0 x e^{-x} \,\mathrm{d}x$ tedy diverguje. □

PŘÍKLAD 9.11. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ je neomezená v okolí bodu 0, jenž leží *uvnitř* integračního intervalu. Jedná se o nevlastní integrál II. druhu, jehož hodnotu chápeme ve smyslu rovnosti

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

konvergují-li integrály na pravé straně. Pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{t}\right]_{\varepsilon}^{1} = -1 + \frac{1}{\varepsilon}, \quad \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{t}\right]_{-1}^{-\varepsilon} = -1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

a tudíž

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty, \quad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Integrál $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ tedy diverguje. □

Poznámka 9.12. Pokusíme-li se v příkladě 9.11 užít Newton-Leibnizova vzorce bezprostředně, obdržíme *zcela chybný výsledek*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{t}\right]_{-1}^{1} = -2,$$

jenž nedává smysl ani z hlediska geometrického (integrandem je kladná funkce, hodnota integrálu tedy má udávat velikost plochy pod grafem). Zdrojem chyby je neoprávněné využití Newton-Leibnizova vzorce (v integrandu je funkce v bodě 0 neomezená).

PŘÍKLAD 9.13. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{0}^{1} x \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto x \ln x$ je neomezená v okolí bodu 0, jedná se o integrál nevlastní II. druhu. Pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$ je

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{1} \overbrace{x}^{v'}\,\overbrace{\ln x}^{u}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x\right]_{\varepsilon}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{1} x^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \ln\varepsilon - \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{1} x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \ln\varepsilon - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_{\varepsilon}^{1} = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \ln\varepsilon - \frac{1}{4}\left(1-\varepsilon^2\right).\end{aligned} \tag{9.1}$$

Potřebujeme tedy vyšetřit, jak se obdržený výraz chová při $\varepsilon \to 0+$. Uvažujme napřed limitu $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon \ln \varepsilon$. Dle l'Hôptialova pravidla je

$$\overset{0\cdot\infty}{\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon \ln \varepsilon} = \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon = 0$$

a tudíž i $\lim_{\varepsilon\to0+}\varepsilon^2\ln\varepsilon=0$. Pak dle (9.1)

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4},$$

tedy integrál konverguje. □

PŘÍKLAD 9.14. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrační interval obsahuje bod 1, v jehož okolí je funkce $x\mapsto\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$ neomezená. Jedná se o integrál nevlastní II. druhu, jenž chápeme ve smyslu rovnosti

$$\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x,$$

konvergují-li integrály na pravé straně. Rozložme $\frac{1}{x^2-4x+3}$ na částečné zlomky: $\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$, $A(x-3)+B(x-1)=1$, $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$. Dostáváme

$$\int\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|$$

a tudíž vzhledem k přítomnosti výrazu $\ln|x-1|$ budou integrály divergovat. Vskutku,

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\left[\ln|x-3|\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\ln|x-3|\right]_0^1-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0+}\left[\ln|x-1|\right]_0^{1-\varepsilon}\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0+}\ln\varepsilon=+\infty.\end{aligned}$$

Z podobných důvodů diverguje rovněž integrál $\int_1^2\frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x$. □

PŘÍKLAD 9.15. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Tento integrál chápeme ve smyslu rovnosti

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$

s nějakým c, existují-li integrály na pravé straně.

Uvažujme $\int_0^b\frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x$ pro libovolné $b>0$:

$$\int_0^b\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}(x+1)=\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_0^b=\operatorname{arctg}b$$

a tudíž

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2}.$$

Podobně předešlému

$$\int_{-b}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}(x+1) = [\operatorname{arctg}(x+1)]_{-b}^{0} = \operatorname{arctg} b$$

a tudíž

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(-a) = \frac{\pi}{2}.$$

Pak bude $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$ □

PŘÍKLAD 9.16. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Uvažujme podobně příkladu 9.15. Pro libovolné $b > 0$ je

$$\int_{0}^{b} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{b} \frac{1}{e^{2x}+1} e^x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{b} \frac{1}{(e^x)^2+1}\,\mathrm{d}e^x = \left[\operatorname{arctg} e^x\right]_0^b$$
$$= \operatorname{arctg} e^b - \operatorname{arctg} e^0 = \operatorname{arctg} e^b - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e^b - \frac{\pi}{4}$$

a tudíž

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} e^b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Jelikož $\lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} e^a = 0$, bude[1]

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} e^x\right]_a^0 = \frac{\pi}{4} - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} e^a = \frac{\pi}{4}.$$

Pak dostaneme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$ □

[1] Mohli bychom také využít souměrnosti grafu sudé funkce $f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$: substituce $x = -t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ dává

$$\int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

atd.