CVIČENÍ 11

Mocninné řady

PŘÍKLAD 11.1. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n.$$

Řešení. Je $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, kde $x_0 = 0$ a $c_n = 2^n$. Určeme poloměr konvergence R. Jelikož

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{2^n} = 2,$$

je $\frac{1}{R} = 2$, $R = \frac{1}{2}$. Intervalem konvergence je $(x_0 - R, x_0 + R) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, v něm řada konverguje absolutně. Pro $|x| > \frac{1}{2}$ řada diverguje. Zjistěme, zda řada konverguje v koncových bodech intervalu konvergence.

Při $x = \frac{1}{2}$ má řada $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$ tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

(diverguje k $+\infty$).

Je-li $x = \frac{1}{2}$, obdržíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-2\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

která součet nemá.

Řada tedy konverguje jen na $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, přičemž na tomto intervale konverguje absolutně.

Příklad 11.2. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Řešení. Pro $c_n = \frac{1}{n!}$ platí

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty,$$

pak $1/R = 0$, poloměr konvergence je $R = +\infty$, a tudíž řada konverguje na $(-\infty, \infty)$. Jedná se o Taylorův rozvoj e^x. Speciálně

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Příklad 11.3. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n.$$

Řešení. Máme $\sum_{n=0}^{\infty}(nx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x)^n$ s $c_n = n^n$. Pro poloměr konvergence R bude

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

a tudíž $R = 0$. Řada tedy konverguje pouze při $x = 0$.

PŘÍKLAD 11.4. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)4^n}.$$

Řešení. Středem je bod $x_0 = 1$. Položme $c_n = \frac{1}{(n+1)4^n}$. Určeme poloměr konvergence R. Jelikož

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)4^n}} = \frac{1}{4\sqrt[n]{n+1}} \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty,$$

je $\frac{1}{R} = \frac{1}{4}$, $R = 4$. Intervalem konvergence je $(x_0 - R, x_0 + R) = (-3, 5)$. Pro $x \in (-3, 5)$ tedy řada konverguje absolutně. Pro $x > 5$ a $x < -3$ řada diverguje. Zjistěme, zda řada konverguje v koncových bodech intervalu konvergence.

Při $x = 5$ máme divergentní řadu harmonickou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Je-li $x = -3$, dostáváme řadu alternující

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Jelikož $\frac{1}{n+1}$, $n = 0, 1$ je kladná posloupnost, monotonně klesající k 0, podle Leibnizova kriteria tato řada konverguje.

V souhrnu dostáváme: při $x \in (-3, 5)$ řada konverguje absolutně, při $x \geq 5$ a $x < -3$ řada diverguje, při $x = -3$ řada konverguje (neabsolutně).

PŘÍKLAD 11.5. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n.$$

Řešení. Platí

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 2$$

pro $n \to \infty$. Pak $1/R = 2$, poloměrem konvergence je $R = \frac{1}{2}$. Interval konvergence je $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Při $x = \frac{1}{2}$ má řada tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a tudíž konverguje.

Při $x = -\frac{1}{2}$ má řada tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \frac{1}{(-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ a rovněž konverguje. V krajích bodech konverguje řada absolutně. V souhrnu řada konverguje absolutně při $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Příklad 11.6. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^{n-1}}.$$

Řešení. Pro poloměr konvergence R bude

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (bylo by pohodlnější napsat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^n}$). Pak $R = 2$. Středem je -2, intervalem konvergence je $(-2-2, -2+2) = (-4, 0)$.

Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^{n-1}}$ v koncových bodech intervalu $(-4, 0)$. Při $x = -4$ je to alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^{n-1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, která konverguje podle Leibnizova kriteria. Při $x = 0$ dostáváme divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^{n-1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Příklad 11.7. Určeme poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

Řešení. Pro $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ je

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e$$

při $n \to \infty$. Poloměr konvergence je $R = \frac{1}{e}$.

Příklad 11.8. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Řešení. Položme $f_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; pak máme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Jelikož je to řada mocninná, má smysl vyšetřovat ihned absolutní konvergenci (v intervalu konvergence totiž konverguje vždy absolutně). Uvažujme proto řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Aplikujme podílové kriterium:

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|x^{2(n+1)-1}|}{2(n+1)-1} \cdot \frac{2n-1}{|x|^{2n-1}} = \frac{|x|^{2n+1}}{|x|^{2n-1}} \frac{2n-1}{2n+1} = |x|^2 \frac{2n-1}{2n+1} \to x^2, \quad n \to \infty.$$

Řada tedy konverguje při $|x| < 1$ a diverguje při $|x| > 1$.

Při $x = 1$ dostaneme alternující řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$, která konverguje podle Leibnizova kriteria.

Při $x = -1$ dostaneme rovněž konvergentní alternující řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^3)^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Řada konverguje absolutně při $|x| < 1$, konverguje neabsolutně při $x = \pm 1$ a diverguje při $|x| > 1$.

Poznámka 11.9. Poznamenejme, že v příkladě 11.8 při zápise řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = 0 + \frac{x}{1} + 0\cdot x^2 - \frac{x^3}{3} + 0\cdot x^4 + \frac{x^5}{5} - \dots$$

ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ část koeficientů vychází rovná 0 a proto zde vzorec $(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ určuje zbývající nenulové koeficienty, nikoliv všechny c_n po řadě. Vzorce pro R uplatnit nelze, nemusí totiž v takových případech dávat správný výsledek. Aplikujeme tedy podílové anebo odmocninové kriterium bezprostředně k řadě z absolutních hodnot.

Příklad 11.10. Vyšetřeme konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^{2n}}{9^n\sqrt{n^5+2}}.$$

Řešení. Čteme poznámku 11.9. Položíme $f_n(x) = \frac{n(x-1)^{2n}}{9^n\sqrt{n^5+2}}$ a uvažujeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Aplikujeme podílové kriterium: při $n \to \infty$ bude

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{(n+1)|x-1|^{2n+2}}{9^{n+1}\sqrt{(n+1)^5+2}} \cdot \frac{9^n\sqrt{n^5+3}}{n|x-1|^{2n}} = \frac{1}{9}\frac{n+1}{n}\frac{\sqrt{n^5+2}}{\sqrt{(n+1)^5+2}}(x-1)^2 \to \frac{(x-1)^2}{9}$$

a tudíž řada konverguje absolutně při $(x-1)^2 < 9$, t. j. $|x-1| < 3$ a diverguje při $(x-1)^2 > 9$, t. j. $|x-1| > 3$.

Interval konvergence je tedy určen nerovnicí $-3 < x-1 < 3$, t. j. $-2 < x < 4$.

Při $x = -2$ máme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^{2n}}{9^n\sqrt{n^5+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+2}}.$$

Jelikož $\sqrt{n^5+2} \sim \sqrt{n^5} = n^{\frac{5}{2}}$ při $n \to \infty$, t. j. $\frac{\sqrt{n^5+2}}{\sqrt{n^5}} \to 1$ pro $n \to \infty$, podle srovnávací věty v limitním tvaru řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+2}}$ konverguje spolu s konvergentní zobecněnou harmonickou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Při $x = 4$ máme opět konvergentní řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{9^n\sqrt{n^5+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+2}}.$$

Mocninná řada tedy konverguje absolutně při $-2 \leq x \leq 4$ a diverguje pro $x < -2$ a $x > 4$.

Poznamenejme, že neopatrné využiti vzorce

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}, \tag{11.1}$$

platného pro řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, v tomto případe by vedlo na chybný výsledek. Vskutku, dosadíme-li do (11.1) $c_n = \frac{n}{9^n\sqrt{n^5+2}}$, dostaneme

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{(n+1)}{9^{n+1}\sqrt{(n+1)^5+2}} \cdot \frac{9^n\sqrt{n^5+3}}{n} = \frac{1}{9}\frac{n+1}{n}\frac{\sqrt{n^5+2}}{\sqrt{(n+1)^5+2}} \to \frac{1}{9}$$

a tudíž $\frac{1}{R} = \frac{1}{9}$, $R = 9$. Výše jsme však zjistili, že ve skutečnosti je $R = 3$, t. j. poslední využitý postup je nesprávný.

Příklad 11.11. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(-3)^n}.$$

Řešení. Čteme poznámku 11.9. Máme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{(-3)^n}$. K $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ aplikujme Cauchyho odmocninové kriterium:

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{x^2}{3^n}} = \frac{x^2}{3},$$

tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje při $|x| < \sqrt{3}$ a diverguje při $|x| > \sqrt{3}$.

Při $x = \sqrt{3}$ má $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(-3)^n}$ tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(-3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Táto řada součet nemá. Při $x = -\sqrt{3}$ dostaneme stejnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{(-3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Příklad 11.12. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n (2x+1)^n.$$

Řešení. Řadu upravme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n (2x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n 2^n \left(x+\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\frac{n+3}{n+4}\right)^n \left(x+\frac{1}{3}\right)^n,$$

což má tvar $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ s $x_0=-\frac{1}{2}$, $c_n=\left(2\frac{n+3}{n+4}\right)^n$. Jelikož platí

$$\sqrt[n]{|c_n|}=\sqrt[n]{\left(2\frac{n+3}{n+4}\right)^n}=2\frac{n+3}{n+4}\to 2$$

při $n\to\infty$, bude $\frac{1}{R}=2$, $R=\frac{1}{2}$. Řada konverguje absolutně v intervalu $(x_0-R,x_0+R)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=(-1,0)$ a diverguje pro $x<-1$, $x>0$.

Uvažujme krajní body intervalu konvergence $(-1,0)$. Při $x=0$ má $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n(2x+1)^n$ tvar $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n$, kde

$$\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^n=\left(\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{n+4}\right)^{\frac{n}{n+4}}\to e^{-1}\neq 0$$

při $n\to\infty$. Pro tuto řadu tedy neplatí nutná podmínka konvergence.

Při $x=-1$ v $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n(2x+1)^n$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n$, nutná podmínka konvergence neplatí ani zde.

Daná mocninná řada tedy konverguje pro $-1<x<0$.