CVIČENÍ 4

Výpočet integrálu neurčitého

Seznámíme se metodou integrace s pomocí nové proměnné (metoda substituce) a integraci *per partes* (po částech).

Vzorce

Substituce

$$\int f(\phi(t)\, \phi'(t)\, \mathrm{d}\, t = \int f(x)\, \mathrm{d}\, x \tag{4.1}$$

$$\int f(\phi(t))\, \mathrm{d}\, \phi(t) = \int f(x)\, \mathrm{d}\, x \tag{4.2}$$

Substituce $x = \phi(t)$ zavádí novou proměnnou t a převádí úlohu výpočtu $\int f(\phi(t))\, \phi'(t)\, \mathrm{d}\, t$ na integraci $\int f(x)\, \mathrm{d}\, x$.

Naopak, řešíme-li $\int f(x)\, \mathrm{d}\, x$, lze hledat substituci tvaru $x = \phi(t)$, po níž upravený integrál $\int f(\phi(t))\, \phi'(t)\, \mathrm{d}\, t$ bude jednodušší. Prakticky substituci provádíme vyloučením x z integrandu i diferenciálu ($\mathrm{d}\, x = \psi'(t)\, \mathrm{d}\, t$).

K obdrženému výsledku aplikujeme zpětnou substituci (vyjádříme t přes x).

Integrace po částech

$$\int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}\, x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, \mathrm{d}\, x$$
$$\int u(x)\, \mathrm{d}\, v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, \mathrm{d}\, u(x)$$

Úlohy

Aplikujme dle potřeby metodu integrace s pomocí nové proměnné a integraci po částech. Všude dále po výpočtu pak do výsledku doplníme integrační konstantu.

PŘÍKLAD 4.1. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Je zřejmá substituce $\arcsin x = t$. Pak bude $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{\arcsin x}^{t}\,\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}t} = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\arcsin x\right)^2.$$

PŘÍKLAD 4.2. Vypočtěme integrál

$$\int x2^{3x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož $(x^2)' = 2x$, v integrandu jedním z činitelů u $\mathrm{d}x$ je výraz, připomínající derivaci výrazu $3x^2$. Integrál tedy můžeme upravit takto:

$$\int x2^{3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 2^{3x^2}\left(3x^2\right)'\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 2^{3x^2}\,\mathrm{d}\left(3x^2\right), \tag{4.3}$$

což odpovídá pravé straně substitučních vzorců (4.1), (4.2) $\int f\left(\phi(x)\right)\phi\left(x\right)'\,\mathrm{d}\,x$ a $\int f\left(\phi(x)\right)\mathrm{d}\,\phi\left(x\right)$ s volbou $\phi(x) = 3x^2$, $f(t) = 2^t$. Vzhledem k těmto vzorcům bude

$$\int x2^{3x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{6}\int 2^{3x^2}\,\mathrm{d}\left(3x^2\right) = \frac{1}{6}\int 2^s\,\mathrm{d}\,s = \frac{2^s}{6\ln 2},$$

kde $s = \phi(x)$. Vrátíme-li se v tomto výsledku k původní proměnné x s pomocí vztahu $s = 3x^2$, dostaneme

$$\int x2^{3x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2^{3x^2}}{6\ln 2}. \tag{4.4}$$

Poznamenejme, že v praxi místo explicitní úpravy integrálu na tvar typu (4.3) je vetšinou pohodlněji postupovat poněkud jinak.

Podle předchozích úvah lze u daného integrálu očekávat, že účinnou bude substituce $3x^2 = s$. Vylučme tedy x z integrandu a diferenciálu s pomocí algebraických úprav: $3x^2 = s$, $\mathrm{d}\,s = \mathrm{d}(3x^2) = 6x\,\mathrm{d}\,x$, $x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{6}\,\mathrm{d}\,s$ a formálně dosaďme obdržené výrazy do integrálu:

$$\int x 2^{3x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \overbrace{2^{3x^2}}^{2^s}\,\overbrace{x\,\mathrm{d}\,x}^{\frac{1}{6}\,\mathrm{d}\,s} = \int 2^s \cdot \frac{1}{6}\,\mathrm{d}\,s = \frac{1}{6}\int 2^s\,\mathrm{d}\,s = \frac{1}{6}\frac{2^s}{\ln 2},$$

což po dosazení (t. j. „substituci“ $s = 3x^2$) vede na výsledek (4.4). Výpočet, vykonaný výše, tento postup zcela odůvodňuje. Takto lze přechod k nové integrační proměnné provádět i obecně.

Příklad 4.3. Vypočtěme integrál

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}\,x,$$

kde $a > 0$.

Řešení. Zavedeme-li novou proměnnou t s pomocí vztahu $a^2 - x^2 = t$, dostaneme $\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x$ a proto bude $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \overbrace{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{t}}\,\overbrace{x\,\mathrm{d}x}^{-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t} = \int \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{t^3} = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}.\end{aligned}$$

Příklad 4.4. Vypočtěme integrál

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. V integrandu je lichá mocnina sinu. Jelikož $\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \sin^2 x \sin x$, přičemž $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ a $(\cos x)' = -\sin x$, nabízí se substituce $\cos x = t$. Dostaneme $\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x\,\mathrm{d}x &= \int \overbrace{(1-\cos^2 x)}^{1-t^2}\,\overbrace{\sin x\,\mathrm{d}x}^{-\,\mathrm{d}t} = \int (t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^3}{3} - t = \frac{(\cos x)^3}{3} - \cos x.\end{aligned}$$

Příklad 4.5. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Integrand obsahuje jen členy e^x, přičemž e^x je v čitateli a $(e^x)' = e^x$. Je vhodné udělat substituci $e^x = t$. Bude $\mathrm{d}\,e^x = e^x\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t$,

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \overbrace{\frac{1}{e^x+1}}^{\frac{1}{t+1}} \overbrace{e^x\,\mathrm{d}\,x}^{\mathrm{d}\,t} = \int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}(t+1) = \ln|t+1|$$
$$= \ln\left(e^x+1\right).$$

Jinak bychom mohli položit $e^x + 1 = s$; pak bude $\mathrm{d}\left(e^x+1\right) = e^x\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,s$,

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \overbrace{\frac{1}{e^x+1}}^{\frac{1}{s}} \overbrace{e^x\,\mathrm{d}\,x}^{\mathrm{d}\,s} = \int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\,s = \ln|s| = \ln\left(e^x+1\right).$$

Příklad 4.6. Vypočtěme

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Jelikož $(\cos x)' = -\sin x$, lze integrál upravit takto:

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}(\cos x)$$
$$= \ln|\cos x|\,.$$

Poslední krok jsme vykonali zavedením do diferenciálu (t. j. využili jsme substitučního vzorce ve tvaru (4.2)). Jinak bychom mohli explicitně položit $\cos x = s$ a vypočíst $\mathrm{d}s = \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$, počemž obdržíme $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}(\cos x) = \int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln|s| = \ln|\cos x|$. □

PŘÍKLAD 4.7. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substituce $e^x = t$ dává $\mathrm{d}e^x = e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{\frac{1}{e^{2x}+1}}^{\frac{1}{t^2+1}}\,\overbrace{e^x\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}t} = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} e^x.$$

Příklad 4.8. Vypočtěme

$$\int x^2(x-1)^5 \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrandem je polynom stupně 7 a tudíž jeho integrace teoreticky žádné potíže nečiní. Algebraické úpravy při přímé integraci však vyžadují jisté úsilí ($(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + \dots$). Práci si můžeme usnadnit, zavedeme-li novou proměnnou $t = x - 1$, čímž „prohodíme“ členy s 2. a 5. mocninami. Pak bude $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $x = t + 1$,

$$\begin{aligned}
\int x^2(x-1)^5 \,\mathrm{d}x &= \int (t+1)^2 t^5 \,\mathrm{d}t = \int \left(t^2 + 2t + 1\right) t^5 \,\mathrm{d}t = \int t^7 \,\mathrm{d}t + 2\int t^6 \,\mathrm{d}t + \int t^5 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^8}{8} + \frac{2}{7}t^7 + \frac{t^6}{6} = t^6\left(\frac{1}{8}t^2 + \frac{2}{7}t + \frac{1}{6}\right) \\
&= (x-1)^6\left(\frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{7}(x-1) + \frac{1}{6}\right).
\end{aligned}$$

Výsledek dle potřeby můžeme dodatečně upravit.

Příklad 4.9. Vypočtěme

$$\int x^2 e^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. V součinu $x^2e^{\frac{x}{2}}$ oba dva členy lze snadno integrovat i derivovat, avšak u x^2 se po zderivování mocnina sníží. Integrujme tedy po částech tak, aby byl zderivován člen x^2:

$$\int \overbrace{x^2}^{u}\,\overbrace{e^{\frac{x}{2}}}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{x^2}^{u}\cdot\overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^{v} - \int \overbrace{2x}^{u'}\,\overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^{v}\,\mathrm{d}x = 2x^2e^{\frac{x}{2}} - 4\int xe^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Zde jsme zvolili $v'(x) = e^{\frac{x}{2}}$ a tudíž

$$v(x) = \int e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Podobným způsobem v

$$\int xe^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

taktéž integrujme po částech:

$$\begin{aligned}\int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{e^{\frac{x}{2}}}^{v'}\,\mathrm{d}x &= \overbrace{x}^{u}\cdot\overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^{v} - \int \overbrace{1}^{u'}\cdot\overbrace{2e^{\frac{x}{2}}}^{v}\,\mathrm{d}x = 2xe^{\frac{x}{2}} - 2\int e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}\\ &= 2\,(x-2)\,e^{\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Pak dostaneme

$$\int x^2e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2x^2e^{\frac{x}{2}} - 4\cdot 2\,(x-2)\,e^{\frac{x}{2}} = 2\left(x^2-4x+8\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

PŘÍKLAD 4.10. Vypočtěme

$$\int x^3(1-2x^2)^8.$$

Řešení. Situace je podobná příkladu 4.8. Bezprostřední integrace polynomu stupně 19 je zdlouhavá, proto raději provedeme substituci $1-2x^2=t$. Dostaneme $-4x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, $x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$, $x^2=\frac{1}{2}(1-t)$,

$$\begin{aligned}\int x^3\left(1-2x^2\right)^8\mathrm{d}x &= \int \overbrace{x^2}^{\frac{1}{2}(1-t)}\overbrace{\left(1-2x^2\right)^8}^{t^8}\overbrace{x\,\mathrm{d}x}^{-\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t} = -\frac{1}{8}\int(1-t)\,t^8\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\int\left(t^8-t^9\right)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{8}\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^{10}}{10}\right)=\frac{t^9}{8}\left(\frac{1}{9}-\frac{t}{10}\right)=\frac{t^9}{720}(10-9t)\\ &= \frac{\left(1-2x^2\right)^9}{720}\left(10-9\left(1-2x^2\right)\right)=\frac{1}{720}\left(1-2x^2\right)^9\left(1+18x^2\right).\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.11. Vypočtěme

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrandem je součin výrazů $\ln x$ a $\frac{1}{\sqrt{x}}$, z nichž první po zderivování nabývá tvaru, podobného druhému činiteli (mocninný výraz). Integrujme tedy po částech takto:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{\ln x}^{u}\,\overbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{\ln x}^{u}\,\overbrace{\left(2\sqrt{x}\right)}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{x}}^{u'}\,\overbrace{\left(2\sqrt{x}\right)}^{v}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\int \mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}.$$

PŘÍKLAD 4.12. Vypočtěme

$$\int \frac{x}{\cos^2 5x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Můžeme si všimnout, že $\frac{1}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5}(\operatorname{tg} 5x)'$. Integrujme po částech:

$$\int \frac{x}{\cos^2 5x}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\frac{1}{\cos^2 5x}}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x\right)}^{v} - \int \overbrace{1}^{u'}\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x\right)}^{v}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{5}\operatorname{tg} 5x - \frac{1}{5}\int \operatorname{tg} 5x\,\mathrm{d}x.$$

Dle výsledku příkladu 4.6 platí

$$\int \operatorname{tg} 5x \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{5}\int \operatorname{tg} 5x \,\mathrm{d}\,(5x) = \frac{1}{5}\ln|\cos 5x|$$

a tudíž

$$\int \frac{x}{\cos^2 5x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{x}{5}\operatorname{tg} 5x - \frac{1}{25}\ln|\cos 5x|\,.$$

PŘÍKLAD 4.13. Vypočtěme integrál

$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení 4.13.1. Integrandem je součin x^3 a e^{-x^2}, přičemž integrovat e^{-x^2} zvlášť nedovedeme. Chceme-li integrovat po částech, pravděpodobně musíme e^{-x^2} derivovat a x^3 pak integrovat:

$$\int \overbrace{x^3}^{v'}\,\overbrace{e^{-x^2}}^{u}\,\mathrm{d}\,x = \overbrace{\frac{x^4}{4}}^{v}\,\overbrace{e^{-x^2}}^{u} - \int \overbrace{\frac{x^4}{4}}^{v}\,\overbrace{\left(-2xe^{-x^2}\right)}^{u'}\,\mathrm{d}\,x.$$

Toto však vede na integrál $\int x^5 e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$, jenž není nikterak jednodušší než integrál původní. Je tedy potřeba hledat jinou cestu.

Můžeme si všimnout, že $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$, $x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = x^2e^{-x^2}x\,\mathrm{d}x$ a tudíž se nabízí substituce $x^2 = t$. Potom dostáváme $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$,

$$\int x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{x^2}^{t}\,\overbrace{e^{-x^2}}^{e^{-t}}\,\overbrace{x\,\mathrm{d}x}^{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int te^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{4.5}$$

Tento integrál lze snadno vypočíst metodou *per partes* s $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t}$. Obdržíme $v(t) = \int e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int e^{-t}\,\mathrm{d}(-t) = -e^{-t}$ (implicitní substituce $-t = s$, $\mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}t$) a

$$\int \overbrace{t}^{u}\,\overbrace{e^{-t}}^{v'}\,\mathrm{d}t = \overbrace{t}^{u}\,\overbrace{(-e^{-t})}^{v} - \int \overbrace{1}^{u'}\cdot\overbrace{(-e^{-t})}^{v}\,\mathrm{d}t = -te^{-t} + \int e^{-t}\,\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{t+1}{e^t}.$$

Po zpětné substituci pak dostaneme

$$\int x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2+1}{2e^{x^2}}.$$

Řešení 4.13.2. Při zpětném pohledu na úpravu (4.5) si můžeme všimnout, že je $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}\big(-x^2\big) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ (substituce $-x^2 = s$, $-2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$, $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}s$) a tudíž vzniká myšlenka integrovat po částech takto:

$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{x^2}^{u}\,\overbrace{xe^{-x^2}}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{x^2}^{u}\overbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)}^{v} - \int \overbrace{2x}^{u'}\overbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)}^{v}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}.$$