CVIČENÍ 5

Integrál racionální lomené funkce

Integrál racionální lomené funkce:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}\,x,$$

kde p, q jsou polynomy. Stačí umět integrovat ryze lomenou funkci.

Rozklad ryze lomené funkce na součet parciálních zlomků

Tvrzení. Vyjádříme-li jmenovatel $q(x)$ ve tvaru součinu výrazů typu $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ (kde $\alpha^2 < 4\beta$, t. j. diskriminant je záporný), lze podíl $\frac{p(x)}{q(x)}$ zapsat ve tvaru součtu parciálních zlomků

$$\frac{p(x)}{q(x)} = S,$$

kde do součtu S přidáme výrazy typu $\frac{D_1}{x-c} + \frac{D_2}{(x-c)^2} + \dots \frac{D_k}{(x-c)^k}$, odpovídající každému výskytu v rozkladu $q(x)$ členu $(x-c)^k$, a výrazy typu $\frac{A_1x+B_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, jež odpovídají členům $(x^2+\alpha x+\beta)^k$.

Integrace parciálních zlomků

Výrazy $\frac{A}{(x-c)^k}$ se snadno integrují podle vzoru mocninné funkce.

Z parciálních zlomků II. druhu se zvláště často setkáme s $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$, což odpovídá dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti 1. Při integrací $\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$ vznikají člen tvaru $\operatorname{arctg} a(bx+c)$ a člen s $\ln(x^2+\alpha x+\beta)$. Postup integrace je zřejmý z následujících příkladů.

Příklad 5.1. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Polynom $x^2 - x + 1$ má záporný diskriminant a nelze ho v reálném oboru rozložit na součin. Jedná se o parciální zlomek. Úpravou na součet čtverců $x^2 - x + 1 = x^2 - 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \,\mathrm{d}t$$

s $t = x - \frac{1}{2}$ (bude $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$). Tento integrál je typu $\int \frac{1}{x^2+a^2} \,\mathrm{d}x$ a lze ho snadno vypočíst substitucí $x = as$; bude $\mathrm{d}x = a \,\mathrm{d}s$,[a]

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left(s^2 + 1\right)} a \,\mathrm{d}s = \frac{1}{a} \int \frac{1}{s^2 + 1} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} s = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 1} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} t\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Tyto integrály, kde se polynom ve jmenovateli díky zápornému diskriminantu upraví na součet čtverců, jsou typu arctg. Podobným způsobem vypočteme, např.

[a]Lze uvažovat i takto:

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right)} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right)} \,\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \int \frac{1}{s^2 + 1} \,\mathrm{d}s.$$

$\int \frac{1}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x$:

$$\int \frac{1}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\left(3x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{36}}\,\mathrm{d}\,x$$

atd.

Příklad 5.2. Vypočtěme

$$\int \frac{18x+1}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Zde v čitateli je $18x+1$, což je $(9x^2+x+1)'$. Proto substitucí $9x^2+x+1=t$ dostaneme

$$\int \frac{18x+1}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{(9x^2+x+1)'}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = \ln|t| = \ln(9x^2+x+1).$$

Tyto příklady ukazují dva možné typy, podle nichž se integruje $\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}\,x$. V obecném případě obdržíme kombinaci těchto dvou.

Příklad 5.3. Vypočtěme

$$\int \frac{6x-5}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Upravíme-li výraz tak, aby v čitateli vzniklo $18x+1=(9x^2+x+1)'$:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-5}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{18x-15}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{18x+1-16}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{18x+1}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{16}{3}\int \frac{1}{9x^2+x+1}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

dostaneme integrály, které jsme již řešili.

Integrace $\int \frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x$ s $k>1$ je zdlouhavější; vzorce lze nalézt v literatuře.

Úlohy

Příklad 5.4. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrandem je ryze lomená funkce. Koeficienty polynomu ve jmenovateli jsou celá čísla a tudíž celý kořen lze hledat v množině $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ (dělitele čísla 6). Dosazením s pomocí Hornerova schématu nalezneme kořeny 1, 2, 3 a tudíž je $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$. Všecky kořeny jsou reálné a jednoduché, proto při nějakých A, B, C bude

$$\frac{x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

pro všechna x. Úpravou na společného jmenovatele obdržíme

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Toto platí pro každé x z definičního oboru zlomku na levé straně právě tehdy, když

$$x = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

pro všechna x. Dosazením za x hodnot 1, 2, 3 (anebo přirovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin — poněkud pracnější) dostaneme

$$1 = 2A,\;\; 2 = -B,\;\; 3 = 2C,$$

odkud $A = \frac{1}{2}$, $B = -2$, $C = \frac{3}{2}$. Pak bude

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2} + \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3} \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1} - 2\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2} + \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-3)}{x-3} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - 2\ln|x-2| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + K
\end{aligned}$$

pro x v intervalech, neobsahujících čísla 1, 2, 3 (K značí libovolnou konstantu). $\square$

PŘÍKLAD 5.5. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Integrandem je ryze lomená funkce. Polynom $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ má záporný diskriminant, jedná se o parciální zlomek II. typu. Úpravou obdržíme

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1+1+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + K,
\end{aligned}$$

kde K je libovolné. Využili jsme vzorce

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{5.1}$$

pro $a \neq 0$ (dokažte ho!). $\square$

PŘÍKLAD 5.6. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Jelikož $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x+1)\,(x-1)^2$, s nějakými A, A_1, A_2 bude

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}.$$

Pak pro všechna x musí platit

$$2x^2 - x + 1 = A(x-1)^2 + A_1(x+1)(x-1) + A_2(x+1).$$

Dosazením $x = 1$, $x = -1$ obdržíme $2A_2 = 2$, $4A = 4$, t. j. $A_2 = 1$, $A = 1$. Přirovnáním koeficientů u x^2 dostaneme $1 + A_1 = 2$, t. j. $A_1 = 1$. Pak bude

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,x}{x+1} + \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2} = \int \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \ln|x+1| + \ln|x-1| + \int (x-2)^{-2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{x-2} + K,$$

kde K je libovolná konstanta. □

Příklad 5.7. Vypočtěme

$$\int \frac{x^2 + 4x - 1}{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Ve jmenovateli $x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x = x(x^3 - x^2 + 4x - 4) = x(x^2(x-1) + 4(x-1)) = x(x-1)(x^2+4)$ a proto s nějakými A, B, C, D bude

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x} = \frac{x^2 + 4x - 1}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Potřebujeme tedy, aby pro všechna x bylo

$$x^2+4x-1 = A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1).$$

Dosazením bodů 0 a 1 dostaneme $-1 = -4A$, $4 = 5B$, odkud $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{4}{5}$. Přirovnáním koeficientů u x^3 dostaneme $0 = A+B+C$, $C = -A-B = -\frac{1}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{21}{20}$. U x^2 koeficienty jsou $1 = -A+D-C$, odkud $D = A+C+1 = \frac{1}{4} - \frac{21}{20} + 1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Pak

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x-1}{x^4-x^3+4x^2-4x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{20}\int \frac{21x-4}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{4}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{20}\int \frac{21x-4}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

V $\int \frac{21x-4}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ vyčleníme v čitateli derivaci jmenovatele $(x^2+4)' = 2x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{21x-4}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = 21\int \frac{x-\frac{4}{21}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{21}{2}\int \frac{2x-\frac{8}{21}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{21}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - \frac{21}{2}\int \frac{\frac{8}{21}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ = \frac{21}{2}\int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{21}{2}\ln(x^2+4) - \frac{4}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

První z integrálů je tabulkový až na substituci $x^2 + a^2 = u$: $\int \frac{1}{x^2+4} \mathrm{d}(x^2+4) = \int \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \ln|u| = \ln(x^2+a^2)$, v druhém jsme využili (5.1). Pak dostaneme

$$\int \frac{x^2+4x-1}{x^4-x^3+4x^2-4x} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln|x| + \frac{4}{5} \ln|x-1| - \frac{21}{40} \ln(x^2+4) + \frac{1}{10} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K,$$

kde K je libovolná konstanta. □

Příklad 5.8. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{x^5-x^4-x+1} \mathrm{d}x.$$

Řešení. $x^5 - x^4 - x + 1 = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1) = (x-1)(x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)^2(x^2+1)$,

$$\frac{1}{x^5-x^4-x+1} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Po vynásobení jmenovatelem $(x+1)(x-1)^2(x^2+1)$ zjistíme, že pro všechna x musí platit

$$A\overbrace{(x-1)^2(x^2+1)}^{(x^2-2x+1)(x^2+1)} + B_1\overbrace{(x+1)(x-1)(x^2+1)}^{x^4-1} + B_2(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)\overbrace{(x+1)(x-1)^2)}^{(x^2-1)(x-1)=x^3-x^2-x+1} = 1.$$

Při $x=-1$ bude $8A=1$, $A=\frac{1}{8}$. Při $x=1$ bude $4B_2=1$, $B_2=\frac{1}{4}$. Při $x=0$ bude $A-B_1+B_2+D=1$, $D-B_1=1-A-B_2=\frac{3}{8}$. Přirovnáme-li koeficienty různých mocnin, po výpočtu dostaneme

$B_1=-\frac{3}{8}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{4}$. Pak bude

$$\frac{1}{x^5-x^4-x+1}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{x+1}{4x^2+4}-\frac{3}{8\,(x-1)}+\frac{1}{8x+8}+\frac{1}{4\,(x-1)^2}$$

a

$$\int\frac{1}{x^5-x^4-x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(x^2+1)}{8}+\frac{\operatorname{arctg}x}{4}+\frac{\ln|x+1|}{8}-\frac{1}{4\,(x-1)}-\frac{3\ln|x-1|}{8}.$$

Příklad 5.9. Vypočtěme

$$\int\frac{1}{x^4+3x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. I když má polynom ve jmenovateli celé koeficienty, je zbytečné u něj hledat racionální kořeny, jelikož je zřejmé, že $x^4+3x^2+2>0$ pro libovolné x a tudíž tento polynom 4. stupně reálné kořeny nemá. Má tedy dva páry komplexně sdružených kořenů a jeho rozklad na součin kořenových činitelů v reálném oboru je součinem dvou kvadratických polynomů se zápornými diskriminanty:

$$x^4+3x^2+2=(x^2+\alpha_1x+\beta_1)(x^2+\alpha_2x+\beta_2)$$

s nějakými α_1, α_2, β_1, β_2, jejichž hodnoty lze určit přirovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin.

V daném případě je zřejmé, že musí být $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ a $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$, poněvadž v opačném případě vzniká na levé straně člen s x. Navíc si můžeme všimnout, že je to polynom bikvadratický: $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2)^2 + 3x^2 + 2 = t^2 + 3t + 2$ s $t = x^2$. Kořeny polynomu $t^2 + 3t + 2$ jsou -1 a -2 a tudíž $t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2)$. Proto $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$. Ryze lomený výraz $\frac{1}{x^4+3x^2+2}$ potom je součtem dvou parciálních zlomků II. typu

$$\frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 + 2}.$$

Po převedení na společného jmenovatele dostaneme, že pro všechna x musí platit

$$(A_1 x + B_1)(x^2 + 2) + (A_2 x + B_2)(x^2 + 1) = 1.$$

Mimo jiné, při $x = 0$ je $2B_1 + B_2 = 1$. Přirovnáním koeficientů u x, x^2 a x^3 dostaneme $2A_1 + A_2 = 0$, $B_1 + B_2 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$. Pak $A_1 = A_2 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = -1$ a tudíž dle (5.1)

$$\int \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2 + 2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K,$$

kde K je libovolná konstanta. □

Příklad 5.10. Vypočtěme

$$\int \frac{x^5}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrandem je neryze lomená funkce. Dělením obdržíme

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^4+1 \\ \cline{2-2} -x^5 - x & x \\ \cline{1-1} -x & \end{array}$$

a tudíž $\frac{x^5}{x^4+1} = x - \frac{x}{x^4+1}$,

$$\int \frac{x^5}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2)^2+1}\,\mathrm{d}(x^2)$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + K.$$

Zde po substitucí $x^2 = t$ je $\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(x^2)$.

PŘÍKLAD 5.11. Vypočtěme

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Výraz s radikálem je tentýž v čitateli a jmenovateli. Pro „umocnění“ lze zkusit substituci $x = t^2$. Bude $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{t-1}{t+t^2}t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+t-2t}{t^2+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{d}t - 4\int \frac{t}{t^2+t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2t - 4\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2t - 4\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}(t+1) = 2t - 4\ln|t+1| \\ &= 2\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+1) + K.\end{aligned}$$

Zde, jako obvykle, v neryze lomeném výraze vyčleníme polynomiální část (v tomto případě i bez explicitního dělení polynomů) a pak integrujeme jednotlivé parciální zlomky. □

PŘÍKLAD 5.12. Vypočtěme

$$\int \frac{e^{4x}-1}{e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $e^{4x} = t$. Bude $\mathrm{d}t = 4e^{4x}\,\mathrm{d}x = 4t\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{4t}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{e^{4x}-1}{e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{t-1}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky:
$$\frac{t-1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$
Musí platit $A(t^2+1)+(Bt+C)t = t-1$. Při $t=0$ bude $A=-1$. Koeficienty u t^2, t jsou $A+B=0$, $C=1$ a tudíž $B=1$,
$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t &= -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\ln|t| + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t = -\ln e^{4x} + \frac{1}{2}\ln(e^{8x}+1) + \operatorname{arctg} e^{4x} \\ &= -4x + \frac{1}{2}\ln(e^{8x}+1) + \operatorname{arctg} e^{4x}.\end{aligned}$$
Pak dostaneme
$$\int \frac{e^{4x}-1}{e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x = -x + \frac{1}{8}\ln(e^{8x}+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} e^{4x}.$$