CVIČENÍ 6

grál racionální lomené funkce a některé podobné integ

Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}\,x$

Integrály, v nichž je integrand lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}\,x, \tag{6.1}$$

kde $R(u, v)$ je racionálně lomená podle u a v, lze s využitím tzv. univerzální trigonometrické substituce

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \tag{6.2}$$

vždy převést na integrál racionální lomené funkce anebo v určitých případech i vypočíst s pomocí elementárních úprav integrandu.

Univerzální trigonometrická substituce

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t. \tag{6.3}$$

Speciální případy

Užití univerzální substituce (6.2) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem a proto je vhodné se napřed zamyslet, zda není možné integrál vypočíst snadněji. Často je užitečná následující rada.

Úvaha 6.1. Je-li integrál ve tvaru (6.1), kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů, mající jednu z vlastností:

$$R(-u,v) = -R(u,v),\ R(u,-v) = -R(u,v),\ R(-u,-v) = R(u,v) \tag{6.4}$$

pro všechna (u,v), pak lze pro integraci využit jedné ze substitucí $t=\sin x$, $t=\cos x$ resp. $t=\operatorname{tg} x$.

Substituce, doporučená úvahou 6.1, může být v praxi vhodnější než univerzální trigonometrická substituce.

Příklad 6.2. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení 6.2.1. Po úpravě lze využít substituce $\cos x = t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin x}\frac{\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}(\cos x) = \int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|.\end{aligned}$$

Řešení 6.2.2. Po úpravě lze využít substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.\end{aligned}$$

Příklad 6.3. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dle vzorce $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ bude

$$\int \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Pak $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}\,\mathrm{d}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\\ &= 2\int \frac{1}{t^2 + 2t + 1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{(t+2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{(t+2)^2}\,\mathrm{d}(t+2)\\ &= -\frac{2}{t+2} = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2}.\end{aligned}$$

Příklad 6.4. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; dle (6.3) bude

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{4t - 1 + t^2 + 3(t^2+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int \frac{1}{4t - 1 + t^2 + 3(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2t^2 + 2t + 2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}2\operatorname{arctg} 2\left(t + \frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right).
\end{aligned}$$

Příklad 6.5. Vypočtěme

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení 6.5.1. Elementární úpravou obdržíme

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x+\cos x}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos x}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int \frac{(\cos x+1)'}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos x+1-1}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\ln(1+\cos x) + \int \mathrm{d}x - \int \frac{1}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ježto $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, bude $\cos 2x + 1 = 2\cos^2 x$ a tudíž

$$\int \frac{1}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Pak dostaneme

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x = x - \ln(1+\cos x) - \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Řešení 6.5.2. Položíme-li $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, bude

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x+\cos x}{\cos x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+1}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2t+1-t^2}{(2t+t^2+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\\ &= -2\int \frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

což vyžaduje rozkladu na několik částečných zlomků. Preferujeme tedy předešlé řešení. $\square$

PŘÍKLAD 6.6. Vypočtěme integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení 6.6.1. Využití univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ dle vzorců (6.3) vede na integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{8t^3}{(1+t^2)^3} \frac{2}{t^2+1} \,\mathrm{d}t = 16 \int \frac{t^3 (1-t^2)^2}{(1+t^2)^6} \,\mathrm{d}t.$$

Dostáváme tedy integrál neryze lomené funkce, přičemž i po vyčlenění ryze lomené části zůstává úloha výpočetně náročnou jakožto integrace parciálního zlomku s vysokým stupněm jmenovatele bez reálných kořenů. Zkusme proto raději najít jinou cestu.

Řešení 6.6.2. Daný integrál má tvar (6.1) s $R(u,v) = u^2 v^3$. Funkce R je lichá podle v a tudíž dle úvahy 6.1 použijme substituci $t = \cos x$. Dostaneme $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$, $\sin x \,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$,

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \sin^2 x \overbrace{\sin x \,\mathrm{d}x}^{-\,\mathrm{d}t} = -\int t^2 \left(1-t^2\right) \mathrm{d}t = \int t^4 \,\mathrm{d}t - \int t^2 \,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x,$$

což je výrazně jednodušší než příslušná integrace v řešení 6.6.1. □

Příklad 6.7. Vypočtěme

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Integrand obsahuje lichou mocninu výrazu $\cos x$. Substituce $\sin x = t$, $\mathrm{d}\,t = \cos x \,\mathrm{d}\,x$,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^5 x \,\mathrm{d}\,x &= \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}\,x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 \,\mathrm{d}(\sin x)\\ &= \int t^2(t-t^2)^2 \,\mathrm{d}\,t = \int t^2(1-2t^2+t^4)\,\mathrm{d}\,t = \int (t^2-2t^4+t^6)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x.\end{aligned}$$

Příklad 6.8. Vypočtěme

$$\int \operatorname{tg}^4 x \,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Integrand $\operatorname{tg}^4 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}$ se nemění při současném nahrazení $\cos x$ a $\sin x$ výrazy $-\cos x$ a $-\sin x$. Položme $\operatorname{tg} x = t$. Bude $\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x = (1+\operatorname{tg}^2 x)\,\mathrm{d}\,x = (1+t^2)\,\mathrm{d}\,x$, $\mathrm{d}\,x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$,

$$\int \operatorname{tg}^4 x \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{t^4}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\begin{array}{rl}
t^4 & \big|\; t^2+1 \\
\underline{-t^4 - t^2} & \big|\; \overline{t^2-1} \\
-t^2 & \\
\underline{t^2+1} & \\
1 &
\end{array}$$

Obvyklým způsobem pak dostaneme $\int \operatorname{tg}^4 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

Příklad 6.9. Vypočtěme

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Řešení. Položíme-li $e^x = t$, bude $\mathrm{d}t = e^x \,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^3+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na částečné zlomky bude ve tvaru $\frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}$, po výpočtu

$$\frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{t+1}{3(t^2-t+1)} - \frac{1}{3\,(t+1)}$$

a tudíž

$$\int \frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t. \tag{6.5}$$

Integrace částečného zlomku II. typu dává

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t-1+3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

Po dosazení do (6.5) dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{t(t+1)(t^2-t+1)}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln|t+1| \\
&= \frac{1}{6}\ln(e^{2x}-e^x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln(e^x+1).
\end{aligned}
$$