

CVIČENÍ 7

Integrály, jež se převádí na integrál racionální lomené funkce

Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Integrály, v nichž je integrand lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x) dx, \quad (7.1)$$

kde $R(u, v)$ je racionálně lomená podle u a v , lze s využitím tzv. univerzální trigonometrické substituce

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (7.2)$$

vždy převést na integrál racionální lomené funkce.

Univerzální trigonometrická substituce

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt. \quad (7.3)$$

Speciální případy

Užití univerzální substituce (7.2) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem a proto je vhodné se napřed zamyslet, zda není možné integrál vypočítat snadněji. Často je užitečná následující rada.

ÚVAHA 7.1. Je-li integrál ve tvaru (7.1), kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů, mající jednu z vlastností:

$$R(-u, v) = -R(u, v), \quad R(u, -v) = -R(u, v), \quad R(-u, -v) = R(u, v) \quad (7.4)$$

pro všechna (u, v) , pak lze pro integraci využít jedné ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$ resp. $t = \operatorname{tg} x$.

Substituce, doporučená úvahou 7.1, může být v praxi vhodnější než univerzální trigonometrická substituce.

PŘÍKLAD 7.2. Vypočtěme

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx.$$

Řešení. Substituce $\sin x = t$, $dt = \cos x \, dx$,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^5 x \, dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int t^2 (1 - t^2)^2 dt = \int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x. \end{aligned}$$

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tohoto druhu lze převést na integrál racionální lomené funkce zavedením nové proměnné t s pomocí substituce

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{7.5}$$

Je-li v integrandu několik výrazů typu $\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{q_1}$, $\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{q_2}$, \dots , kde q_1, q_2, \dots jsou racionální čísla, lze rovněž využít substituce (7.5), v níž zvolíme za m společný jmenovatel zlomků q_1, q_2, \dots .

Speciálním případem je integrál tvaru $\int R(x, \sqrt[m]{\alpha x + \beta}) dx$, kde lze položit $\alpha x + \beta = t^m$.

PŘÍKLAD 7.3. Vypočtěme $\int \frac{x dx}{1 + \sqrt[5]{x+1}}$.

Řešení. Položme $x + 1 = t^5$. Pak bude $dx = 5t^4 dt$, $x = t^5 - 1$,

$$\int \frac{x dx}{1 + \sqrt[5]{x+1}} = 5 \int \frac{(t^5 - 1)t^4}{t + 1} dt,$$

což je integrál neryze lomené funkce. Dělením polynomů $t^9 - t^4$ a $t + 1$ dostáváme

$$\frac{t^9 - t^4}{t + 1} = t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{t + 1}$$

a tudíž

$$\int \frac{(t^5 - 1)t^4}{t + 1} dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2 \ln |t + 1|.$$

Pro obdržení výsledku poslední výraz vynásobíme pěti a zpětně dosadíme $t = (x + 1)^{\frac{1}{5}}$. \square

PŘÍKLAD 7.4. Vypočtěme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx.$$

Řešení. Položme $x = t^6$. Bude $dx = 6t^5 dt$,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx = 6 \int \frac{t^3}{t^2 + 1} t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2 + 1} dt = 6 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dx + 6 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt,$$

protože

$$\begin{array}{r} t^8 \\ - t^8 - t^6 \\ \hline - t^6 \\ t^6 + t^4 \\ \hline t^4 \\ - t^4 - t^2 \\ \hline - t^2 \\ t^2 + 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} t^2 + 1 \\ \hline t^6 - t^4 + t^2 - 1 \end{array} \right.$$

Vychází

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx = \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5} + 2\sqrt{x} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \operatorname{arctg} \left(x^{\frac{1}{6}} \right). \quad \square$$

PŘÍKLAD 7.5. Vypočtěme

$$\int \frac{2x + 5}{\sqrt[3]{6x + 1}} dx.$$

Řešení 7.5.1. Substituce $6x + 1 = t$, $6 dx = dt$, $dx = \frac{1}{6} dt$; $2x = \frac{1}{3}(t - 1)$,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 5}{\sqrt[3]{6x + 1}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3}(t - 1) + 5}{\sqrt[3]{t}} \frac{1}{6} dt = \frac{1}{18} \int \frac{t + 14}{t^{\frac{1}{3}}} dt = \frac{1}{18} \int t^{\frac{2}{3}} dt + \frac{7}{9} \int t^{-\frac{1}{3}} dt \\ &= \frac{1}{18} \int t^{\frac{2}{3}} dt + \frac{7}{9} \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{30} t^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{6} t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{30} (6x + 1)^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{6} (6x + 1)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Řešení 7.5.2 (doporučené). Zavedeme-li proměnnou s vztahem $6x + 1 = s^3$, bude $6 dx = 3s^2 ds$, $dx = \frac{1}{2}s^2 ds$, $2x = \frac{1}{3}(s^3 - 1)$,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 5}{\sqrt[3]{6x + 1}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3}(s^3 - 1) + 5}{s} \frac{1}{2} s^2 ds = \frac{1}{6} \int (s^3 + 14)s ds = \frac{1}{6} \int (s^4 + 14s) ds \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} s^5 + 7s^2 \right) = \frac{1}{30} (6x + 1)^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{6} (6x + 1)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.6. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} (\sqrt[3]{x} + 1)} dx.$$

Řešení. Substituce $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)} dx &= \int \frac{1}{t^3(t^2+1)} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 6 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt \\ &= 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 6t - 6 \operatorname{arctg} t = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}).\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.7. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{1+x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

Řešení. Substituce $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$, $\frac{1+x}{1-x} = t^2$; $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $1+x = \frac{2t^2}{t^2+1}$, $dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int \frac{t^2+1}{2t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt = 2 \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \operatorname{arctg} t \\ &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\end{aligned}$$

Integrály $\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}) dx$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tvaru

$$\int R(e^{\alpha x}) dx$$

lze vypočítat zavedením nové proměnné $t = e^{\alpha x}$. Podobným způsobem lze upravit integrál tvaru

$$\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}) dx,$$

v němž R je racionální lomená funkce n proměnných a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou celá čísla, položíme-li $t = e^x$. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ soudělná, je vhodné položit $t = e^{\alpha x}$, kde α je největší společný dělitel těchto čísel.

PŘÍKLAD 7.8. Vypočtěme

$$\int \frac{e^{6x} + 3}{e^{3x} + 6} dx.$$

Řešení. Položíme-li $t = e^{3x}$ (neboli, což je totéž, $x = \frac{1}{3} \ln t$), bude $dx = \frac{1}{3t} dt$ a tudíž

$$\int \frac{e^{6x} + 3}{e^{3x} + 6} dx = \frac{1}{3} \int \frac{t^2 + 31}{t + 6} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \int \frac{t^2 + 3}{t(t + 6)} dt = \frac{1}{3} \int \left(1 - 3 \frac{2t - 1}{t(t + 6)} \right) dt,$$

protože $\frac{t^2+3}{t^2+6t} = 1 + \frac{3-6t}{t^2+6t}$. Rozkladem $\frac{2t-1}{t(t+6)}$ na částečné zlomky je $\frac{2t-1}{t(t+6)} = -\frac{1}{6t} + \frac{13}{6} \frac{1}{t+6}$ a proto $\int \frac{2t-1}{t(t+6)} dt = -\frac{1}{6} \ln |t| + \frac{13}{6} \ln |t+6|$. Po výpočtu a dosazení $t = e^{3x}$ dostaneme

$$\int \frac{e^{9x} + 3}{e^{3x} + 9} dx = \frac{1}{3} t + \frac{1}{2} \ln |t| - \frac{13}{6} \ln |t + 6| = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{3}{2} x - \frac{13}{6} \ln (e^{3x} + 6).$$

Vypočtěme některé *určité* integrály podobných typů. Připomeňme si věty o integraci s pomocí nové proměnné.

VĚTA 7.9. Má-li funkce ϕ na (a, b) spojitou derivaci, pro každou spojitou funkci f platí

$$\int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt. \quad (7.6)$$

Vztah (7.6) znamená, že v případě integrálu $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx$ se jedná, vlastně, o integrál $\int f(t) dt$ v mezích $\phi(a)$ a $\phi(b)$. Novou proměnnou t tedy zavedeme vztahem $t = \phi(x)$.

Metodu substituce občas používáme v alternativní podobě, a sice tak, že se vzorec (7.6) přečte „v opačném směru“.

V Ě T A 7.10. Necht $[\alpha, \beta]$ a $[a, b]$ jsou uzavřené intervaly a funkce $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ je taková, že $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$. Má-li funkce ψ na $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci, pak pro každou spojitou funkci f platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(s))\psi'(s) ds. \quad (7.7)$$

V tomto případě novou proměnnou s zavedeme implicitně s pomocí vztahu $\psi(s) = x$.

Poznámka 7.11 (o praktickém využití metody substituční). V praxi zavedení nové proměnné v určitém integrálu provádíme tak, že — po ověření splnění

předpokladů — do integrandu a diferenciálu dosazujeme $t = \phi(x)$ resp. $x = \psi(s)$ a oboje vyjadřujeme s pomocí nové proměnné. Dále výpočtem hodnot, odpovídajících koncovým bodům původního integračního intervalu, zjistíme meze, ve kterých se mění nová proměnná. Obdržíme pak nový integrál, jehož hodnota je shodná s hodnotou původního integrálu (přičemž není potřeba zpětné substituce).

PŘÍKLAD 7.12. Vypočtěme

$$\int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

Řešení. $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 4 \Rightarrow t = 2$;

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int_0^2 \frac{1}{1 + t} 2t dt = 2 \int_0^2 \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt = 2 \left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{1}{t + 1} dt \right) \\ &= 2 (2 - [\ln(t + 1)]_0^2) = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.13. Vypočtěme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx.$$

Řešení. V integrandu je lichá mocnina výrazu $\sin x$. Je vhodné zavést novou proměnnou vztahem $\cos x = t$, $dt = -\sin x \, dx$; meze budou: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = - \int_1^0 (1 - t^2) \, dt = \int_0^1 (1 - t^2) \, dt = \frac{2}{3}.$$

PŘÍKLAD 7.14. Vypočtěme

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}} \, dx.$$

Řešení. Je zřejmé, že zde je vhodné položit $\ln x = t$, pak bude $dt = \frac{1}{x} dx$; meze budou: $x = 1 \Rightarrow t = 0$, $x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$;

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = [\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$