

CVIČENÍ 8

Geometrické aplikace integrálu určitého

PŘÍKLAD 8.1. Vypočtěme obsah plochy S útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3$.

Řešení. Platí $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Graf této funkce je znázorněn na obrázku 8.1. Funkce na $[0, 3]$ střídá znaménko v bodech 1, 2 a 3, přičemž 3 je již krajní bod intervalu. Funkce je kladná na intervalu $(1, 2)$ a záporná na $(0, 1)$ a $(2, 3)$. Požadovaný obsah je součtem obsahů třech barevně vyznačených obrazců. Pro $1 \leq x \leq 2$ je $f(x) \geq 0$, obsah plochy odpovídajícího obrazce je roven $\int_1^2 f(x) dx$. Pro $0 \leq x \leq 1$ a $2 \leq x \leq 3$ je $f(x) \leq 0$ a tudíž obsahy odpovídajících obrazců jsou

$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 (-f(x)) dx$, $\int_2^3 |f(x)| dx = \int_2^3 (-f(x)) dx$. Proto je obsah plochy

$$S = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = \frac{11}{4}.$$

Pro výpočet je vhodné zapsat integrál neurčitý

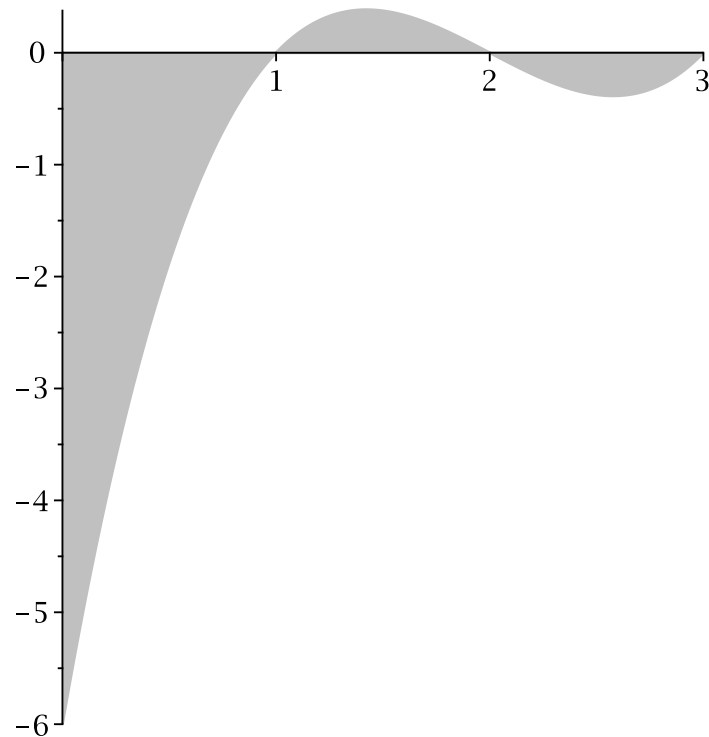
$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x.$$

Pak bude $S = -[F(x)]_0^1 + [F(x)]_1^2 - [F(x)]_2^3 = -F(1) + F(0) + F(2) - F(1) - F(3) + F(2) = -2F(1) + 2F(2) - F(3)$. Stačí tedy jen vypočíst $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$. \square

PŘÍKLAD 8.2. Vypočtěme obsah plochy S útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a přímkami $y = \frac{1}{2}$, $x = 4$.

Řešení. Sestrojme graf (obrázek 8.2). Přímka $y = \frac{1}{2}$ protíná křivku $y = \sqrt{x}$ v bodě $\frac{1}{4}$. Obsah plochy bude

$$S = \int_{\frac{1}{4}}^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^4 - \frac{1}{2} \left[x \right]_{\frac{1}{4}}^4 = \frac{2}{3} \left(8 - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \frac{27}{8}.$$

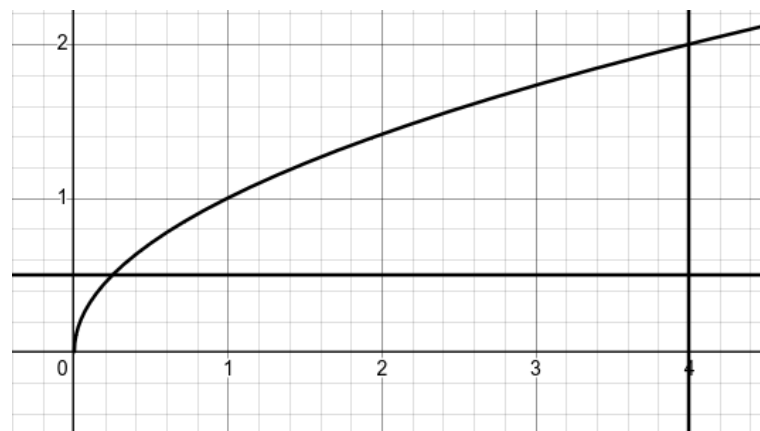


OBRÁZEK 8.1

PŘÍKLAD 8.3. Vypočtěme obsah plochy S uzavřeného geometrického útvaru, ohraničeného grafy funkcí $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ v intervalu $(-1, 3)$.

Řešení. Po načrtnutí schematického grafu (viz obrázek 8.3) zjistíme, že se potřebný útvar určuje kořeny rovnice

$$(x - 1)^2 = \frac{x}{2} + 1 \quad (8.1)$$



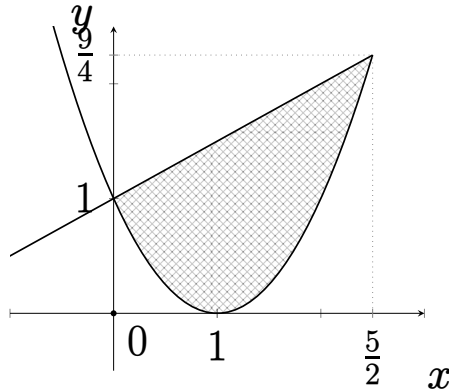
OBRÁZEK 8.2

nebo, což je totéž,

$$x^2 - \frac{5}{2}x = 0. \quad (8.2)$$

Kořeny rovnice (8.2) jsou 0 a $\frac{5}{2}$. V intervalu $(0, \frac{5}{2})$ leží graf funkce g nad grafem funkce f . Proto obsah jimi ohraničené plochy je

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) dx - \int_0^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{5}{2}} x dx + \int_0^{\frac{5}{2}} dx - \int_0^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 d(x-1) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} - \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^{\frac{5}{2}} = \frac{65}{16} - \frac{35}{24} = \frac{125}{48}. \end{aligned}$$



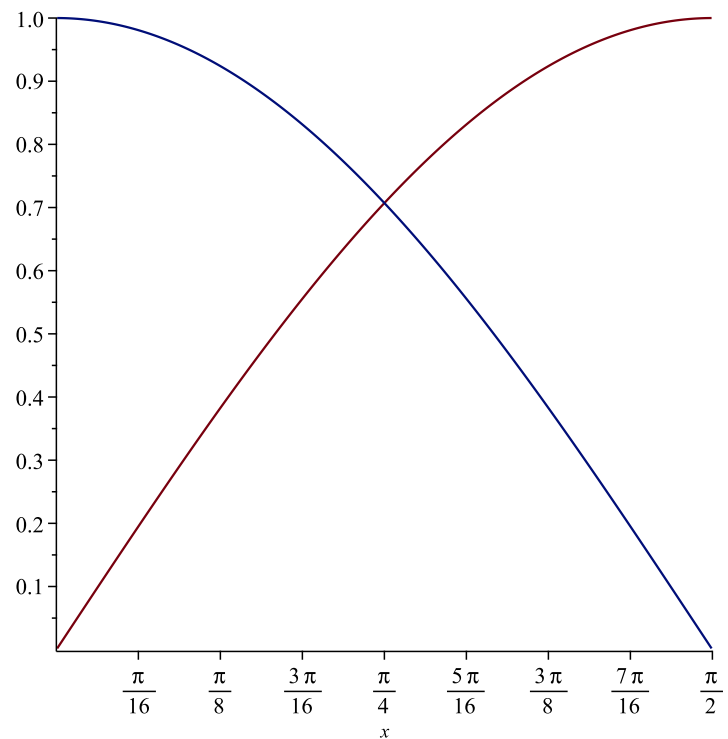
OBRÁZEK 8.3. Plocha ohraničená grafy $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

PŘÍKLAD 8.4. Vypočtěme obsah plochy S útvaru ohraničeného grafy $y = \sin x$, $y = \cos x$ a přímkou $y = 0$ při $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení. Sestrojme graf (obrázek 8.4). Křivky $y = \sin x$, $y = \cos x$ se v daném intervalu protínají v jeho středu (t. j. při $x = \frac{\pi}{4}$). Dle souměrnosti obsah plochy bude

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$

PŘÍKLAD 8.5. Vypočtěme objem rotačního tělesa vzniklého otáčením grafů $y = 4x - x^2$, $y = x$ podle vodorovné osy.



OBRÁZEK 8.4

Řešení. Body průniku křivek $y = 4x - x^2$, $y = x$ jsou $x = 0$, $x = 3$;

$$V = \pi \int_0^3 ((4x - x^2)) dx - \pi \int_0^3 x^2 dx = \pi \int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4) dx = \frac{108}{5}\pi.$$

PŘÍKLAD 8.6. Vypočtěme délky oblouku křivky o rovnici $y = \ln(\sin x)$, odpovídajícího hodnotám $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení. Pro $f(x) = \ln(\sin x)$ je $f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \cotg x$. Proto délka oblouku křivky je

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cotg^2 x} \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} \sin x \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos^2 x} \sin x \, dx.$$

V posledním integrálu je vhodné zavést novou proměnnou vztahem $\cos x = t$; pak $dt = -\sin x \, dx$. Dolní a horní meze pro t budou $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Dostaneme

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos^2 x} \sin x \, dx = - \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{1 - t^2} \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2} \, dt.$$

Rozkladem výrazu $\frac{1}{1-t^2}$ na částečné zlomky je $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$ a tudíž

$$l = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \, dt = \frac{1}{2} [-\ln |1-t| + \ln |1+t|]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$