

CVIČENÍ 9

Nevlastní integrály

PŘÍKLAD 9.1. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Uvažujme $\int_0^b \frac{x}{x^4+1} dx$ pro $b > 0$. Jelikož $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$, po substituci $x^2 = t$ pro novou proměnnou t dostaneme meze $0, b^2$ a bude

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^b \frac{x}{x^4 + 1} d(x^2) = \frac{1}{2} \int_0^{b^2} \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} t]_0^{b^2} = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(b^2) - 0) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(b^2). \end{aligned}$$

Vodorovná přímka $y = \frac{\pi}{2}$ je asymptotou funkce $x \rightarrow \operatorname{arctg} x$ ve směru $+\infty$ a tudíž

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{x^4 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(b^2) = \frac{\pi}{4}.$$

Integrál $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx$ tedy konverguje a má hodnotu $\frac{\pi}{4}$. □

PŘÍKLAD 9.2. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Uvažujme integrál $\int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ pro $b > 0$ a zavedme v něm novou proměnnou $t = x^2 + 1$. Bude $dt = 2x dx$, $x dx = \frac{1}{2} dt$. Meze pro t budou 1 a $b^2 + 1$. Dostaneme

$$\int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^{b^2+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[\sqrt{t} \right]_1^{b^2+1} = \sqrt{b^2 + 1} - 1.$$

Jelikož $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{b^2 + 1} = +\infty$, je

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = +\infty.$$

Integrál tedy diverguje. □

PŘÍKLAD 9.3. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtete jeho hodnotu):

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Pro libovolné $b > 0$ je

$$\int_0^b \sin x \, dx = -[\cos x]_0^b = -\cos b + 1.$$

Limita $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ neexistuje a tudíž neexistuje ani $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x \, dx$. Integrál $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ tedy nekonverguje. □

PŘÍKLAD 9.4. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtete jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 9} \, dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Tento integrál konverguje, konvergují-li $\int_{-\infty}^c \frac{1}{x^2+9} dx$, $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx$ při nějakém c ; pak by bylo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx = \int_{-\infty}^c \frac{1}{x^2+9} dx + \int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx$.

Uvažujme $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+9} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+3^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right]_0^b = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{b}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Pak dle souměrnosti (integrujeme sudou funkcí)

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+9} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{6}.$$

Dostaneme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. □

PŘÍKLAD 9.5. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} dx.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}$ je neomezená v okolí bodu $\frac{3}{4}$. Jedná se o nevlastní integrál II. druhu. Na všech intervalech $[\frac{3}{4} + \varepsilon, 1]$, kde ε je malé kladné číslo, je tato funkce spojitá a tudíž existují integrály $\int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} dx$.

Pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} dx$. Po substituci $t = 3 - 4x$, $dt = -4 dx$ dostaneme $dx = -\frac{1}{4} dt$ a dolní a horní meze pro novou proměnnou: $3 - 4(\frac{3}{4} + \varepsilon) = -4\varepsilon$ a $3 - 4 = -1$. Bude

$$\int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} dx = -\frac{1}{4} \int_{-4\varepsilon}^{-1} \frac{1}{\sqrt[5]{t}} dt = -\frac{1}{4} \int_{-4\varepsilon}^{-1} t^{-\frac{1}{5}} dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \left[t^{\frac{4}{5}} \right]_{-4\varepsilon}^{-1} = -\frac{5}{16} \left(1 - (4\varepsilon)^{\frac{4}{5}} \right).$$

Jelikož $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{\frac{4}{5}} = 0$, dostaneme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{3}{4}+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} dx = -\frac{5}{16}.$$

Integrál tedy konverguje a platí $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}} dx = -\frac{5}{16}$. □

PŘÍKLAD 9.6. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ je neomezená v okolí bodu 1, jedná se o nevlastní integrál II. druhu. Uvažujme $\int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, kde $b < 1$, a vykonáme substituci $1 - x^2 = t$, $dt = -\frac{1}{2}x dx$; meze pro t budou 1 a $1 - b^2$:

$$\int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_1^{1-b^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = - \int_1^{1-b^2} d\sqrt{t} = - [\sqrt{t}]_1^{1-b^2} = 1 - \sqrt{1-b^2}.$$

Pak snadno dostáváme

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 - \lim_{b \rightarrow 1^-} \sqrt{1-b^2} = 1,$$

tedy integrál $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ konverguje. □

PŘÍKLAD 9.7. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} dx.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}$ je neomezená v okolí bodu 1, jedná se o nevlastní integrál II. druhu.

Pro malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} dx$:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} dx = - \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{3}{2}} d(1-x) = 2 \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{1-\varepsilon} = 2 \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - 1 \right).$$

Avšak $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = +\infty$, integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} dx$ tedy diverguje. □

PŘÍKLAD 9.8. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2 x}$ je neomezená v okolí bodu 0, jedná se o nevlastní integrál II. druhu. Pro malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ a zavedme v něm novou proměnnou $t = \ln x$. Bude $dt = x^{-1} dx$, meze pro t budou $\ln \varepsilon$ a $\ln e^{-1} = -1$. Dostaneme

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_{\ln \varepsilon}^{-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{\ln \varepsilon}^{-1} = - \left[t^{-1} \right]_{\ln \varepsilon}^{-1} = 1 - \frac{1}{\ln \varepsilon}.$$

Při $\varepsilon \rightarrow 0+$ je $\ln \varepsilon \rightarrow -\infty$ a tudíž $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\ln \varepsilon} = 0$. Integrál tedy konverguje a platí $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = 1$. \square

PŘÍKLAD 9.9. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^3 x} dx.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{x \ln^3 x}$ je neomezená v okolí bodu 1, jedná se o nevlastní integrál II. druhu.

Pro malé $\varepsilon > 0$ uvažujme $\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ a zaveďme v něm novou proměnnou $t = \ln x$. Bude $dt = x^{-1} dx$, meze pro t budou $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ a $\ln(1 - \varepsilon)$. Dostaneme

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln(1-\varepsilon)} \frac{1}{t^3} dt = \int_{-\ln 2}^{\ln(1-\varepsilon)} t^{-3} dt = -\frac{1}{2} [t^{-2}]_{-\ln 2}^{\ln(1-\varepsilon)} = \frac{1}{\ln^2 2} - \frac{1}{\ln^2(1-\varepsilon)}.$$

Při $\varepsilon \rightarrow 0+$ bude $\ln(1 - \varepsilon) \rightarrow 0$, přičemž $\ln(1 - \varepsilon) < 0$, neboť pro malé kladné ε je $\ln(1 - \varepsilon)$ záporné vzhledem k tomu, že $1 - \varepsilon < 1$. Proto $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\ln(1-\varepsilon)} = -\infty$ (viz obrázek ??) a tudíž $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\ln^2(1-\varepsilon)} = +\infty$.

Integrál $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ tedy diverguje. \square

PŘÍKLAD 9.10. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Pro $a < 0$ uvažujme $\int_a^0 x e^{-x} dx$ a integrujme po částech:

$$\begin{aligned} \int_a^0 x e^{-x} dx &= \int_a^0 \overbrace{x}^u \overbrace{e^{-x}}^{v'} dx = - [x e^{-x}]_a^0 + \int_a^0 e^{-x} dx \\ &= a e^{-a} - [e^{-x}]_a^0 = a e^{-a} - 1 + e^{-a} = (a + 1) e^{-a} - 1. \end{aligned}$$

Při $a \rightarrow -\infty$ bude $e^{-a} \rightarrow +\infty$, $(a + 1) e^{-a} \rightarrow -\infty$ (při záporném a s velkým $|a|$ je $e^{-a} = e^{|a|}$ a násobí se záporným číslem $a + 1$, přičemž $-a = |a| \rightarrow +\infty$). Dostáváme $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x e^{-x} dx = -\infty$. Integrál $\int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx$ tedy diverguje. \square

PŘÍKLAD 9.11. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ je neomezená v okolí bodu 0, jenž leží uvnitř integračního intervalu. Jedná se o nevlastní integrál II. druhu, jehož hodnotu chápeme ve smyslu rovnosti

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx,$$

konvergují-li integrály na pravé straně. Pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = - \left[\frac{1}{t} \right]_{\varepsilon}^1 = -1 + \frac{1}{\varepsilon}, \quad \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx = - \left[\frac{1}{t} \right]_{-1}^{-\varepsilon} = -1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

a tudíž

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = +\infty, \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx = +\infty.$$

Integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ tedy diverguje. □

Poznámka 9.12. Pokusíme-li se v příkladě 9.11 užít Newton-Leibnizova vzorce bezprostředně, obdržíme zcela chybný výsledek

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = - \left[\frac{1}{t} \right]_{-1}^1 = -2,$$

jenž nedává smysl ani z hlediska geometrického (integrandem je kladná funkce, hodnota integrálu tedy má udávat velikost plochy pod grafem). Zdrojem chyby je neoprávněné využití Newton-Leibnizova vzorce (v integrandu je funkce v bodě 0 neomezená).

PŘÍKLAD 9.13. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^1 x \ln x \, dx.$$

Řešení. Funkce $x \mapsto x \ln x$ je neomezená v okolí bodu 0, jedná se o integrál nevlastní II. druhu. Pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$ je

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \overbrace{x}^{v'} \overbrace{\ln x}^u \, dx &= \frac{1}{2} [x^2 \ln x]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 x^2 \frac{1}{x} \, dx = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon - \frac{1}{4} [x^2]_{\varepsilon}^1 = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon - \frac{1}{4} (1 - \varepsilon^2). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Potřebujeme tedy vyšetřit, jak se obdržovaný výraz chová při $\varepsilon \rightarrow 0+$. Uvažujme napřed limitu $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \ln \varepsilon$. Dle l'Hôpitalova pravidla je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \ln \varepsilon \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon = 0$$

a tudíž i $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^2 \ln \varepsilon = 0$. Pak dle (9.1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4},$$

tedy integrál konverguje. □

PŘÍKLAD 9.14. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \, dx.$$

Řešení. Integrační interval obsahuje bod 1, v jehož okolí je funkce $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ neomezená. Jedná se o integrál nevlastní II. druhu, jenž chápeme ve smyslu rovnosti

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \, dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \, dx,$$

konvergují-li integrály na pravé straně. Rozložme $\frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ na částečné zlomky: $\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$, $A(x-3) + B(x-1) = 1$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$. Dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x - 3| - \frac{1}{2} \ln |x - 1|$$

a tudíž vzhledem k přítomnosti výrazu $\ln|x-1|$ budou integrály divergovat. Vskutku,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= \frac{1}{2} [\ln|x-3|]_0^1 - \frac{1}{2} [\ln|x-1|]_0^1 = \frac{1}{2} [\ln|x-3|]_0^1 - \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln|x-1|]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon = +\infty. \end{aligned}$$

Z podobných důvodů diverguje rovněž integrál $\int_1^2 \frac{1}{x^2-4x+3} dx$. □

PŘÍKLAD 9.15. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní integrál I. druhu. Tento integrál chápeme ve smyslu rovnosti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_{-\infty}^c \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx + \int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

s nějakým c , existují-li integrály na pravé straně.

Uvažujme např. $\int_{-1}^b \frac{x}{x^2+2x+2} dx = \int_{-1}^b \frac{1}{(x+1)^2+1} dx$ pro libovolné $b > 0$:

$$\int_{-1}^b \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_{-1}^b \frac{1}{(x+1)^2 + 1} d(x+1) = [\operatorname{arctg}(x+1)]_{-1}^b = \operatorname{arctg}(b+1)$$

a tudíž

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-1}^b \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Podobně předešlému

$$\int_a^{-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_a^{-1} \frac{1}{(x+1)^2 + 1} d(x+1) = [\operatorname{arctg}(x+1)]_a^{-1} = \operatorname{arctg} a$$

a tudíž

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(-a) = \frac{\pi}{2}.$$

Pak bude $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. □

PŘÍKLAD 9.16. Vyšetřeme konvergenci následujícího integrálu (případně vypočtěme jeho hodnotu):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Řešení. Uvažujme podobně příkladu 9.15. Pro libovolné $b > 0$ je

$$\begin{aligned} \text{pr } \int_0^b \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int_0^b \frac{1}{e^{2x} + 1} e^x dx = \int_0^b \frac{1}{(e^x)^2 + 1} de^x = [\operatorname{arctg} e^x]_0^b \\ &= \operatorname{arctg} e^b - \operatorname{arctg} e^0 = \operatorname{arctg} e^b - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e^b - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

a tudíž

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} e^b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Jelikož $\lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} e^a = 0$, bude^a

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg} e^x]_a^0 = \frac{\pi}{4} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} e^a = \frac{\pi}{4}.$$

Pak dostaneme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. □

^aMohli bychom také využít souměrnosti grafu sudé funkce $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ dx : substituce $x = -t$, $dx = -dt$ dává

$$\int_a^0 f(x) dx = - \int_{-a}^0 f(-x) dx = - \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^{-a} f(x) dx$$

atd.