PŘEDNÁŠKA 10

Mocninné řady II

Dále uvažujeme funkce jedné reálné proměnné a omezíme se jen základními pojmy. Podrobněji rozebereme důležitý speciální případ řady mocninné.

§ 10.1. Obecné pojmy

Funkční řadou se rozumí nekonečný součet

$$f_1 + f_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n, \tag{10.1}$$

kde $f_1, f_2, \ldots$ jsou funkce jedné reálné proměnné. Vypočteme-li hodnoty těchto funkcí v bodě x, dostaneme číselnou řadu

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \tag{10.2}$$

jež pro toto dané x muže konvergovat či nikoliv.

DEFINICE 10.1. Oborem konvergence funkční řady (10.1) se rozumí množina všech bodů $x \in \mathbb{R}$, v nichž konverguje číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Vztah (10.2) tedy určuje funkci $f : M \to \mathbb{R}$. Otázkou však je, přesně na jaké množině M je tato funkce definována a jaké jsou její vlastnosti, zejména zda je f na M spojitá či diferencovatelná, jsou-li takovými všecky $f_1, f_2, \ldots$. Pouhá konvergence řady (10.2) v jednotlivých bodech $x \in M$ tyto vlastnosti, obecně řečeno, nezaručuje (viz příklad 10.6); táto implikace vyžaduje jiného — silnějšího — druhu konvergence.

Pro řady funkční rozlišujeme mezi bodovou a stejnoměrnou konvergenci.

DEFINICE 10.2 (bodová konvergence řady). Bodovou konvergencí funkční řady $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ se rozumí konvergence jednotlivých číselných řad $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pro konkretní body x, t. j. konvergence posloupnosti $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n \geq 1$, při pevně zvolené hodnotě x.

Pojem konvergence stejnoměrné, jenž je specifický právě pro řady funkční, znamená stejnoměrnou konvergenci posloupnosti částečných součtů.

§ 10.1.1. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

DEFINICE 10.3 (stejnoměrná konvergence posloupnosti). Budiž $u_1, u_2, \ldots$ posloupnost funkcí, definovaných na nějakém intervalu I, a M buď nějaká podmnožina I. Řekněme, že tato posloupnost konverguje k nějaké funkci u stejnoměrně na M, jestliže k libovolně malému ε lze vždy najít N_ε tak, a by pro libovolná $n \geq N_\varepsilon$ a $x \in M$ platilo

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon. \tag{10.3}$$

V takovém případe píšeme $u_n \rightrightarrows u$ pro $n \to +\infty$ a říkáme, že limita $\lim_{n\to\infty} u_n(x)$ existuje *stejnoměrně na množině* M.

S využitím pojmu nejmenší horní meze lze vlastnost $u_n \rightrightarrows u$ formulovat takto:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in M} |u_n(x) - u(x)| = 0.$$

Poznámka 10.4 (o rozdílu mezi bodovou a stejnoměrnou konvergenci). Ze stejnoměrné konvergence $u_n \rightrightarrows u$, samozřejmě, plyne bodová konvergence $u_n \to u$, ovšem opačné tvrzení neplatí. Rozdíl mezi dvěma pojmy ihned poznáme, zapíšeme-li definici konvergence bodové: to, že $u_n(x) \to u(x)$ pro $x \in M$ bodově, znamená, že pro libovolné $x \in M$ k libovolně malému $\varepsilon > 0$ existuje dostatečně velké N_ε takové, že pro $n \geq N_\varepsilon$ platí (10.3). Tedy různým bodům x mohou odpovídat *různé* hodnoty N_ε a není zaručeno, že lze N_ε zvolit jednotným způsobem na celé množině M.

Vzhledem k poznámce 10.4 může být $u_n \rightrightarrows u$ pouze když $u_n \to u$ bodově a tudíž při ověřování stejnoměrnosti limity vždy začneme zjištěním limity bodové.

PŘÍKLAD 10.5. Posloupnost funkcí $u_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$, konverguje k $u(x) = 1$ stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$.

Vysvětlení. Pro libovolné x platí $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) = \cos(0) = 1$, t. j. na $M = [-\pi, \pi]$ posloupnost bodově konverguje ke konstantní funkci $u(x) = 1$. Zkusme ověřit, zda tato konvergence je stejnoměrná ve smyslu definice 10.3. S pomocí vzorce $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ dostaneme

$$\left|\cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right| = 2\sin^2\left(\frac{x}{2n}\right). \tag{10.4}$$

Zvolme libovolně malé $\varepsilon > 0$. Aby platilo

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2n}\right) - 1\right| < \varepsilon, \tag{10.5}$$

vzhledem k (10.4) stačí, aby bylo $\sin^2\left(\frac{x}{2n}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy $\left|\sin\left(\frac{x}{2n}\right)\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, což bude zaručeno při $\frac{|x|}{2n} < \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, t. j.

$$n > \frac{|x|}{2\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}. \tag{10.6}$$

Potřebujeme zvolit N_ε tak, aby pro $n \geq N_\varepsilon$ vždy platilo (10.5), a to navíc nezávisle na hodnotě x. Největší hodnotou $|x|$ pro $-\pi \leq x \leq \pi$ je π a tudíž nerovnice (10.6) jistě bude platit pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$ a libovolné $n \geq N_\varepsilon$, položíme-li

$$N_\varepsilon = \frac{\pi}{2\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} + 1. \tag{10.7}$$

Jelikož hodnota (10.7) nezávisí na x, tímto byla dokázána stejnoměrná konvergence $u_n \rightrightarrows 1$. □

PŘÍKLAD 10.6. Posloupnost funkcí $u_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $n \geq 1$, bodově konverguje k funkci

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases} \tag{10.8}$$

Konvergence není na $[0, 1]$ stejnoměrná.

Vysvětlení. Je zřejmé, že při $0 < x < 1$ je $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ a $u_n(1) = 1$ pro všechna n, tedy $u_n \to u$ bodově. (10.3)

$$|u_n(x) - u(x)| = \begin{cases} x^n & \text{pro } 0 \le x < 1 \\ |x^n - 1| & \text{pro } x = 1. \end{cases} \tag{10.9}$$

Z grafu (a rovněž i vzorce (10.9)) je zřejmé, že nejmenší horní mez těchto veličin je 1: $\sup_{0\le x\le 1} |u_n(x) - u(x)| = 1$ a tudíž není konvergence stejnoměrná.

Poznamenejme, že, i když všecky funkce u_n jsou na $[0, 1]$ spojité, součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je nespojitá funkce (10.8). □

§ 10.1.2. Stejnoměrná konvergence funkční řady

DEFINICE 10.7 (stejnoměrná konvergence řady). Funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M, jestliže na M stejnoměrně konverguje posloupnost jejich částečných součtů.

DEFINICE 10.8 (majoranty funkční řady). Platí-li pro všechna $x \in M$ a $n \ge 1$

$$|f_n(x)| \le a_n,$$

říkáme, že řada s kladnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je majorantou pro funkční řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

VĚTA 10.9 (Weierstrassovo kriterium). Funkční řada, pro níž na dané množině existuje konvergentní majoranta, konverguje na této množině stejnoměrně.

PŘÍKLAD 10.10. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^2}$ konverguje stejnoměrné pro $-\infty < x < \infty$.

Vysvětlení. Při $-\infty < x < \infty$, $n \ge 1$ platí $\left|\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^2}\right| \le \frac{\pi}{2n^2}$, přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Řada pak konverguje stejnoměrně podle věty 10.9. □

V případe stejnoměrné konvergence lze dokázat, že součet řady spojitých (resp. diferencovatelných) funkcí bude rovněž funkcí spojitou (diferencovatelnou). Budiž $[a, b]$ nějaký interval.

VĚTA 10.11 (o spojitosti součtu). Buď $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkční řada, kde všecky f_1, f_2, ... jsou na $[a, b]$ spojité. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[a, b]$ stejnoměrně, pak její součet je rovněž spojitou funkcí na $[a, b]$.

Bez předpokladu stejnoměrné konvergence zaručit spojitost součtu nekonečně mnoha funkcí obecně nelze (viz příklad 10.6).

VĚTA 10.12 (o diferencovatelnosti součtu). Buď $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkční řada, kde všecky f_1, f_2, ... mají na $[a, b]$ spojitou derivaci, přičemž v každém bodě $x \in [a, b]$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje na $[a, b]$ stejnoměrně. Pak je součet $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkcí diferencovatelnou na $[a, b]$ a v každém bodě $x \in [a, b]$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Poznámka 10.13. Toto tvrzení lze dokázat v obecnějším tvaru: ve větě 10.12 stačí předpokládat, že všecky f_1, f_2, ... mají na $[a, b]$ konečnou derivaci a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě $x \in [a, b]$.

§ 10.2. Mocninné řady

DEFINICE 10.14. Mocninnou řadou se nazývá funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots,$$

kde $c_1, c_2, \dots$ je nekonečná posloupnost čísel. Bod x_0 se nazývá středem řady.

Po substituci $x - x_0 = t$ bez újmy na obecnosti lze uvažovat pouze případ $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots.$$

§ 10.2.1. Konvergence mocninné řady

VĚTA 10.15 (Abel). Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ při $x = a$ ($a \neq 0$), pak rovněž konverguje pro všechna x s $|x| < a$.

DŮSLEDEK 10.16. Diverguje-li $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ při $x = a$, pak diverguje i pro všechna x s $|x| > a$.

VĚTA 10.17 (o poloměru konvergence). Pro mocninnou řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se středem v 0 vždy existuje R ($0 \leq R \leq +\infty$) takové, že:

(1) pro všechna $x \in (-R, R)$ řada konverguje absolutně;
(2) při $|x| > R$ řada diverguje.

Je-li $R = +\infty$, oborem konvergence je $(-\infty, \infty)$; pro $R = 0$ konverguje řada jen ve svém středu (oborem konvergence je tedy množina jednoprvková).

Číslo R ve větě se nazývá poloměrem konvergence mocninné řady.

Poznámka 10.18. Při $|x| = R$ může řada konvergovat neabsolutně, popř. divergovat.

VĚTA 10.19 (o stejnoměrné konvergenci mocninné řady). Buď R poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Pak:

(1) v každém uzavřeném intervalu $[-r, r]$, kde $0 < r < R$, konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ stejnoměrně;
(2) diverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ při $x = R$, pak její konvergence na $[0, R)$ není stejnoměrná (podobné v bodě $-R$).

Z věty 10.19 (1) vzhledem k Weierstrassově větě 10.9 plyne, že součet mocninné řady uvnitř intervalu konvergence vždy představuje spojitou funkci. Spojitost v bodech $R, -R$ pak záleží na tom, zda v tomto bodě řada konverguje.[1]

PŘÍKLAD 10.20. Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$.

Řešení. Použijme podílové kriterium pro řadu z absolutních hodnot $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} |x|^n$:

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} |x|^{n+1} \frac{n2^n}{|x|^n} = \frac{n}{n+1} \frac{|x|}{2} \to \frac{|x|}{2}$$

při $n \to +\infty$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} |x|^n$ tedy konverguje při $|x| < 2$ a diverguje při $|x| > 2$. V intervalu $(-2, 2)$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ konverguje absolutně.

[1] V bodech $R, -R$ mluvíme o spojitosti zleva resp. zprava.

Při $x = 2$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ řadou harmonickou: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ a tudíž diverguje. Při $x = -2$ je to řada alternující $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(-1)^n 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, jež konverguje podle Leibnizova kriteria. □

S pomocí podobných úvah lze dokázat následující užitečné vzorce pro určení poloměru konvergence.

VĚTA 10.21. Buď R poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda,$$

pak $\frac{1}{R} = \lambda$.

VĚTA 10.22. Buď R poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda,$$

pak $\frac{1}{R} = \lambda$.

§ 10.2.2. Taylorova řada

Připomeňme si větu o Taylorově vzorci.

VĚTA 10.23 (Taylorův vzorec). Buď f funkce, jež má v bodě x_0 spojité derivace do řádu n včetně. Pak pro x v okolí bodu x_0 je

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

kde pro zbytkový člen $r_n(x)$ platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{10.10}$$

VĚTA 10.24 (Lagrangeův tvar zbytku Taylorova vzorce). Pro libovolné x v okolí x_0 platí

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{10.11}$$

kde ξ je jistý bod, nacházející se mezi x_0 a x.

Mocninná řada

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

je Taylorovou řadou pro funkci f. Speciálními případy jsou rozvoje

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

(poslední pro $x \in (-1, 1]$).

§ 10.2.3. Operace s mocninnými řadami

VĚTA 10.25. Mocninnou řadu uvnitř jejího intervalu konvergence lze člen po členu derivovat: je-li, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)$ při $|x| < R$, platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$