# PŘEDNÁŠKA 1

# Neurčitý integrál

## § 1.1. Primitivní funkce a integrál neurčitý

Mějme funkci $f$ definovanou a spojitou na nějakém intervalu $(a, b)$. Pojmy primitivní funkce a integrálu neurčitého slouží pro zodpovězení otázky: *derivací čeho je výraz $f(x)$?*

DEFINICE 1.1. *Primitivní funkce* k funkci $f$ na intervalu $(a, b)$ je taková funkce $F$, že pro každé $x$ z $(a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Např. funkce $F(x) = \frac{5}{3}x^3$ je primitivní funkcí k $f(x) = 5x^2$, neboť $F'(x) = \frac{5}{3} \cdot 3x^2 = 5x^2 = f(x)$. Navíc všechny primitivní funkce pro $f(x) = 5x^2$ mají tvar $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + C$, kde $C$ je libovolná konstanta (toto platí i obecně).

DEFINICE 1.2. Výraz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in (a, b), \tag{1.1}$$

kde $F$ je funkce primitivní k $f$ a $C$ je libovolná konstanta, se nazývá *integrálem neurčitým* funkce $f$.

Poznámka 1.3. Jinak se dá říci, že integrálem neurčitým dané funkce je jakákoliv její primitivní funkce, anebo souhrn všech primitivních funkcí. Integrál neurčitý se tedy definuje jednoznačné až na „aditivní konstantu“. Pojmy primitivní funkce a integrálu neurčitého jsou vesměs shodné.

Symbol $\int$ je označován jako integrační znak, funkce $f$ se nazývá *integrandem* a formální symbol „$\mathrm{d}x$“ slouží k označení proměnné, podle níž daný výraz integrujeme. Zápis čteme takto: „integrál z $f(x)$ podle $x$“.

Neurčitý integrál (1.1) zodpovídá otázku: *jak vypadají všecky možné výrazy, které po zderivování vzhledem k proměnné $x$ se promění na $f(x)$?* Platí tedy, že

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \quad \left(\int F'(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x) + C, \tag{1.2}$$

kde $C$ je libovolná konstanta. Operace derivování a nalezení integrálu neurčitého jsou v tomto smyslu navzájem inverzní. Konstanta $C$ se nazývá *integrační konstantou.*

VĚTA 1.4 (o existenci primitivní funkce). Ke každé funkci spojité na intervalu $(a, b)$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní a tudíž má funkce integrál neurčitý.

Poznámka 1.5. Nehledě na to, že „$\mathrm{d}x$“ v zápisu integrálu je pouze formální symbol, jenž značí proměnnou, podle níž se integruje, v praxi je pohodlné (a z hlediska výpočtů také vhodné) tlumočit výraz „$f(x)\,\mathrm{d}x$“ jako „$f(x) \cdot \mathrm{d}x$“ („$f(x)$ krát $\mathrm{d}x$“). Píšeme tedy např. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

## § 1.2. Vlastnosti integrálu neurčitého

Základními vlastnostmi integrálu neurčitého jsou relace (1.2). Vzhledem k § 1.1 a vlastnostem derivace platí vlastnost *linearity* integrálu: pro libovolné spojité funkce $f_1$, $f_2$ a konstanty $\lambda_1$, $\lambda_2$ je

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, \mathrm{d}x = \lambda_1 \int f_1(x)\, \mathrm{d}x + \lambda_2 \int f_2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Mimo jiné, konstantu lze vždy vytknout před znak integrálu a integrál součtu (rozdílu) dvou výrazů je součtem (rozdílem) příslušných integrálů.

Poznámka 1.6 (důležité varování). Neexistují smysluplné vzorce, které by vyjadřovaly $\int f(x)g(x)\, \mathrm{d}x$ nebo $\int \frac{f(x)}{g(x)}\, \mathrm{d}x$ přes $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ a $\int g(x)\, \mathrm{d}x$!

## § 1.3. Výpočet integrálu neurčitého

„Výpočtem“ integrálu neurčitého se rozumí jeho vyjádření s využitím konečně mnoha elementárních funkcí pomocí algebraických operací a operace složení. Např. $\int (x^2 + 5e^{3x})\, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}e^{3x} + C$ (výsledkem je lineární kombinace funkcí mocninné a exponenciální); $\int xe^{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ (složení funkcí exponenciální a kvadratické), kde $C$ je libovolná konstanta. Kontrola zderivováním: $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}e^{3x} + C\right)' = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{5}{3}e^{3x}3 = x^2 + 5e^{3x}$; $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.

Derivace konkrétních funkcí vždy vypočítáme podle známých pravidel derivování, t. j. výsledek je svým způsobem garantován a k jeho dosažení stačí jen znát základní vlastnosti derivace a tabulku derivací elementárních funkcí. V případě integrace je situace odlišná: může se totiž stát, že neurčitý integrál nějaké funkce zásadně „nelze vypočítat“. Toto znamená, že existují elementární funkce, jejichž primitivní funkce již mezi elementární funkce nepatří. Je tomu tak např. pro $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \sin(x^2)$ apod.; jsou to funkce, pro něž nelze integrál $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ žádným způsobem vyjádřit přes funkce elementární (t. j. mocninné, exponenciální, trigonometrické, polynomiální, racionální lomené).

Poznámka 1.7. Skutečnost, že se nějaký integrál nevyjadřuje ve funkcích elementárních, svědčí pouze o tom, že se s nim pracuje obtížněji. Je sice žádoucí integrál vyjádřit v elementárních funkcích, jsou však důležité integrály, pro které to možné není. Například, funkce $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ je důležitá v teorii pravděpodobnosti (tzv. chybová funkce), funkce $C_q(x) = \int_0^x \cos(qx^2)\, \mathrm{d}x$ a $S_q(x) = \int_0^x \sin(qx^2)\, \mathrm{d}x$ jsou tzv. integrály Fresnelovy, jichž se užívá ve fyzice apod.

Poznámka 1.8. Na rozdíl od derivací, pro integrál platí, že:
1. ne každý integrál neurčitý „lze vypočítat“;
2. i pokud daný integrál neurčitý vypočítat lze, je potřeba nalézt způsob jak to udělat. *Obecně platná metoda pro výpočet libovolných integrálu neexistuje.*

Pro integrál, jež explicitně vypočítat lze, můžeme očekávat následující případy:
1. vzorec pro integrál je znám bezprostředně z tabulek;

(2) po vhodné úpravě lze obdržet integrál, shodný s některým z tabulkových nebo jemu podobný;
(3) na integrál lze (bezprostředně nebo po úpravě) aplikovat jednu z integračních metod (integrace s pomocí nové proměnné nebo po částech).

### § 1.3.1. Tabulky základních integrálů

Přečtením tabulky známých derivací elementárních funkcí v opačném směru přirozeně vzniká užitečná tabulka základních integrálů (viz tabulka 1.1).[1]

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \tag{1.4}$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1) \tag{1.5}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \tag{1.6}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \tag{1.7}$$

TABULKA 1.1. Integrály některých elementárních funkcí.

Vskutku, máme $(x^m)' = mx^{m-1}$ a pak pro $m \neq 0$ platí $x^{m-1} = \frac{(x^m)'}{m} = \left(\frac{x^m}{m}\right)'$, t. j. $F(x) = \frac{x^m}{m}$ je primitivní funkcí k $f(x) = x^{m-1}$. Dále platí $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ atd. Podobným způsobem lze odvodit integrály řády dalších známých funkcí. Jiné často využívané vzorce pro integrály nalezneme v tabulce 1.2; jejích odvození je však složitější.

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + C \tag{1.8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm B}\right| + C \tag{1.9}$$

$$\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + C \tag{1.10}$$

$$\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + C \tag{1.11}$$

TABULKA 1.2. Další často využívané integrály.

---

[1] Pro lepší přehlednost v této tabulce vynecháváme libovolnou aditivní konstantu, která tam, samozřejmě, vždycky patří.

Druhý vzorec v (1.4) chápeme jako přehlednou, avšak neúplné přesnou podobu vzorce (1.3), vyjadřujícího integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. I když tento vzorec v takovéto zkrácené podobě zcela běžně potkáváme, jeho matematicky přesným zněním je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{pro } x < 0, \\ \ln x + C_2 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

kde $C_1$ a $C_2$ jsou libovolné konstanty. Integrační konstanty zde tedy mohou být *různé* na levé a pravé poloose. Důvodem je fakt, že $\ln|x|$ není v bodě $x = 0$ definován a tak se definiční obor této funkce dělí na dvě části: $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, na nichž se výraz $\frac{1}{x}$ integruje zvlášť.

„Tabulkové“ integrály v uvedené podobě zpravidla nepotkáme a u konkretních integrálů je potřeba vymyslet vhodné úpravy.

PŘÍKLAD 1.9. Vypočtěme integrál

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Tento integrál v tabulkách bezprostředně nenalezneme. Vypočítáme ho však velice snadno pomocí vzorce pro cosinus dvojitého uhlu, jenž nám umožní mocninu snížit:

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\,(\sin x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + C.$$

PŘÍKLAD 1.10. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, vzhledem k linearitě integrálu bude

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x.$$

Podle tabulky integrálů $\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$, $\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x$ a tudíž

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

## § 1.3.2. Dva obecnější vzorce

Uveďme dvě často využívaná tvrzení, jejichž důkaz lze provést bezprostředním zderivováním.

TVRZENÍ (o integrálu funkce s lineárně pozměněným argumentem). Je-li známo, čemu se rovná $\int f(x) \,\mathrm{d}x = F(x)$, při libovolných $\alpha$, $\beta$ ($\alpha \neq 0$) bude

$$\int f(\alpha x + \beta) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta). \tag{1.12}$$

Tohoto tvrzení se užívá zvláště často. Uveďme typický příklad.

PŘÍKLAD 1.11. $\int e^{7x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} e^{ax} + C.$

PŘÍKLAD 1.12. $\int \cos(3x - 8) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cos(3x - 8) + C.$

TVRZENÍ (o integrálu logaritmické derivace). Má-li funkce $f$ spojitou derivaci na nějakém intervalu $I$, přičemž $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$, pak

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C, \tag{1.13}$$

kde $C$ je libovolná konstanta.

PŘÍKLAD 1.13. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Pro kladná $x$ je

$$\int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} \,\mathrm{d}x = \ln(\ln x) + C$$