PŘEDNÁŠKA 2

Základní metody výpočtu neurčitého integrálu

§ 2.1. Metoda integrace po částech (*per partes*)

Metoda integrace po částech může být vhodná v případech, když je integrand ve tvaru součinu dvou výrazů, z nichž jeden je žádoucí zderivovat a druhý dovedeme integrovat.[1]

§ 2.1.1. Princip integrace po částech

VĚTA 2.1 (o integrací po částech). Pro diferencovatelné funkce u a v platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Důkaz. Mějme dvě diferencovatelné funkce u a v. Pak dle pravidla derivovaní součinu je $(uv)' = uv' + u'v$, odkud $uv' = (uv)' - vu'$ a proto

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Jelikož platí

$$\int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)$$

(integrační konstantu zde lze ignorovat), z (2.2) integrací obdržíme (2.1). □

Poznámka 2.2. Využijeme-li pojmu diferenciálu, můžeme zapsat vztah (2.1) v podobě

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x), \tag{2.3}$$

která je obvykle pohodlnější k zapamatování.

Způsobu výpočtu integrálů, jenž se zakládá na vzorcích (2.1), (2.2), se říká *integrace po částech* neboli *per partes*. Využití této metody je vhodné, jestliže bude integrál $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ jednodušší než $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (t. j. zderivování u při současném zintegrování v' zpět na v situaci v nějakém smyslu zlepšuje).

§ 2.1.2. Jednoduché příklady integrace po částech

PŘÍKLAD 2.3. Vypočtěme integrál $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ s pomocí integrace *per partes*.

Řešení. Oba dva činitele x a $\cos x$ se dobře derivují a integrují, avšak pro ten první je $x' = 1$. Zvolme tedy ve vzorci (2.1) $u(x) = x$; pak musí být $v'(x) = \cos x$, odkud

[1] Je to, v podstatě, jediná funkční náhražka chybějícího pravidla integrace součinu.

dostaneme $v(x) = \int v'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$ a tudíž dle (2.1)

$$\int \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{\cos x}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{1}^{u'} \cdot \overbrace{\sin x}^{v}\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Integrál $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ je tabulkový ($\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$) a proto

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C,$$

kde C je libovolná konstanta. □

Poznámka 2.4 (o správné volbě členů). Pro úspěšnou integraci po částech je třeba v (2.1) rozumně zvolit u a v'. Položíme-li, např. v $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ z příkladu 2.3 $u(x) = \cos x$, $v'(x) = x$, bude $u'(x) = -\sin x$, $v(x) = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$ a dostaneme

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x,$$

což je výsledek nevyhovující, jelikož ukol výpočtu integrálu $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$ není nikterak snadnější než původní zadání. Nevhodná volba členů tedy způsobí, že při integraci po částech k zjednodušení původního integrálu nedochází (je zřejmé, že by v tomto případě bylo vhodné člen x právě derivovat, nikoliv integrovat).

Metody integrace po částech lze, samozřejmě, využít i opakovaně.

PŘÍKLAD 2.5. Vypočtěme $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Vzhledem ke zkušenosti s příkladem 2.3 budeme derivovat x^2 (zjednoduší se) a integrovat e^x (umíme to provést). Metodu integrace po částech zde použijeme dvakrát:

$$\int \overbrace{x^2e^x\,\mathrm{d}x}^{\boxed{\substack{u=x^2,\quad v'=e^x\\ u'=2x,\ v=\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x}}} = x^2e^x - 2\int \overbrace{xe^x\,\mathrm{d}x}^{\boxed{\substack{u=x,\ v'=e^x\\ u'=1,\ v=e^x}}} = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Integrační konstantu stačí přidat až na konci. □

V některých případech integrace po částech nevede přímo na konečný výsledek, avšak po jejím opakovaném využití obdržíme vztah, jenž lze chápat jako rovnici pro určení hodnoty integrálu.

PŘÍKLAD 2.6. Vypočtěme integrály

$$I(x) = \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x, \quad J(x) = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Řešení. Jelikož $(e^x)' = e^x$ a derivace sinu a kosinu jsou, až na znaménko, znovu kosinus nebo sinus, očekáváme, že metodou *per partes* jeden z těchto integrálu převedeme na ten druhý a naopak, přičemž v daném případě není důležité, který z těchto členů budeme derivovat. Vykonáme-li toto dvakrát, dostaneme zase integrál původní a tudíž i vztah pro určení jeho hodnoty. Uvažujme např. $J(x)$ a proveďme *per partes* s $u(x) = \sin x$, $\mathrm{d}v(x) = e^x\,\mathrm{d}x$; pak bude $\mathrm{d}u(x) = \cos x\,\mathrm{d}x$, $v(x) = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$ a tudíž

$$J(x) = \int \overbrace{\sin x}^{u}\,\overbrace{e^x\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}v} = \overbrace{\sin x}^{u}\,\overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v}\,\overbrace{\cos x\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = e^x \sin x - I(x). \tag{2.5}$$

Vykonáme-li podobné úpravy s $I(x)$, obdržíme

$$I(x) = \int \overbrace{\cos x}^{u}\, \overbrace{e^x \,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}v} = \overbrace{e^x}^{u}\, \overbrace{\cos x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v}\, \overbrace{(-\sin x)\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = e^x \cos x + \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x,$$

což znamená, že $I(x) = e^x \cos x + J(x)$. Odvodili jsme tedy, že pro uvažované integrály platí vztahy

$$I(x) = e^x \cos x + J(x), \quad J(x) = e^x \sin x - I(x),$$

odkud dostaneme $I(x) - J(x) = e^x \cos x + J(x)$, $I(x) + J(x) = e^x \sin x$ a tudíž je

$$I(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C, \quad J(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Přidali jsme na konci integrační konstantu, jelikož integrál neurčitý má zahrnovat všecky primitivní funkce.

Poznamenejme, že, zajímá-li nás pouze jeden z integrálů (2.4), např. $J(x)$, stačí v (2.5) provést integraci po částech ještě jednou, čímž získáme rovnici pro určení $J(x)$. $\square$

§ 2.1.3. Běžné typy integrálů, jež lze vypočítat integrací po částech

Metodu *per partes* je vhodné použit zejména pro následující často se vyskytující typy integrálů:

Integrály $\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$ a $\int p(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$

Integrand je ve tvaru součinu polynomu $p(x)$ a funkce, jejíž integrál lze snadno vypočítat. Derivujeme pak ten polynom ($u = p(x)$), v novém integrandu obdržíme polynom nižšího stupně (*per partes* aplikujeme několikrát, až se polynom zderivuje na konstantu). Modelem je příklad 2.3.

Integrály $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$

Zde oba dva činitele lze zcela jednoduše integrovat i derivovat. Jelikož $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, vychází, že lze $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ vyjádřit přes $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$ a naopak. Použijeme-li *per partes* dvakrát (ve stejném směru, abychom se nevrátili na začátek!), obdržíme vztah, jenž lze považovat za rovnici pro určení daného integrálu (příklad 2.6).

Integrály typů $\int p(x)(\ln x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\operatorname{arctg} x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\operatorname{arcctg} x)^m\,\mathrm{d}x$

Integrály tohoto typu, kde m je přirozené číslo a $p(x)$ je polynom, lze vypočíst integrací po částech (derivujeme člen s $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$). Společným u těchto integrálu je to, že derivace $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ jsou racionální výrazy, kdežto integrálem polynomu je opět polynom. Je-li $m > 1$, integraci po částech provedeme víckrát.

Podobně lze vypočítat $\int p(x)(\arcsin x)^m\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)(\arccos x)^m\,\mathrm{d}x$.

Příklad 2.7. Vypočtěme $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrací po částech obdržíme

$$\int \overbrace{1}^{v'} \cdot \overbrace{\arcsin x}^{u}\,\mathrm{d}x = \overbrace{x}^{v}\, \overbrace{\arcsin x}^{u} - \int \overbrace{x}^{v}\, \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'}\,\mathrm{d}x = x \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{t-x^2}}$$
$$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2).$$

Jelikož s $1 - x^2 = s$, $-2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$ je

$$\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2) = \int s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = 2s^{\frac{1}{2}} = 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

dostaneme

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

PŘÍKLAD 2.8. Vypočtěme $\int (\arcsin x)^2 \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Podobně příkladu 2.7

$$\int \overbrace{1}^{v'} \cdot \overbrace{(\arcsin x)^2}^{u} \,\mathrm{d}x = \overbrace{x}^{v} \overbrace{(\arcsin x)^2}^{u} - \int \overbrace{x}^{v} \overbrace{\frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'} \,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Ve výsledku opět integrujme po částech s $u = \arcsin x$, $v' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (t. j. tak, aby byl zderivován zase člen s $\arcsin x$); dle (2.6) bude $v = \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}(1-x^2) = 2\sqrt{1-x^2}$ (s implicitní substitucí $1 - x^2 = s$) a tudíž

$$\begin{aligned}\int \overbrace{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}^{v'} \overbrace{\arcsin x}^{u} \,\mathrm{d}x &= \overbrace{2\sqrt{1-x^2}}^{v}\, \overbrace{\arcsin x}^{u} - \int \overbrace{2\sqrt{1-x^2}}^{v}\, \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{u'} \,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.\end{aligned}$$

Dosazením do (2.7) dostaneme

$$\int (\arcsin x)^2 \,\mathrm{d}x = x\,(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

§ 2.2. Metoda integrace s pomocí nové proměnné (substituce)

Metoda integrace s pomocí nové proměnné, jak říká její název, je založena na zavedení nové integrační proměnné, např. t, místo původní proměnné x prostřednictvím určitého vztahu typu $x = \phi(t)$ anebo $t = \psi(x)$ (tzv. substituce). Aplikujeme-li tuto substituci v nějakém integrálu $\int g(x) \,\mathrm{d}x$, po vyloučení původní proměnné x z integrandu $g(x)$ a diferenciálu $\mathrm{d}x$ dostaneme jiný integrál podle nové proměnné. Substituci lze hodnotit jako úspěšnou, dostaneme-li ve výsledku integrál v nějakém smyslu jednodušší nebo vhodnější pro další úpravy (je-li možné substituci provést). Po výpočtu pomocného integrálu podle nové proměnné je potřeba se vrátit k proměnné původní.

§ 2.2.1. Princip integrace s pomocí nové proměnné

Derivujeme-li složený výraz tvaru $F(\phi(t))$, dle řetězového pravidla máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\, \phi'(t).$$

Integrací tohoto vztahu (za předpokladu spojitosti funkcí f, ϕ a ϕ') bezprostředně dostáváme

$$\int f(\phi(t))\, \phi'(t) \,\mathrm{d}t = F(\phi(t)) + C, \tag{2.8}$$

kde $f = F'$. Jelikož F je funkcí primitivní pro f, platí $F(x) = \int f(x) \,\mathrm{d}x$ a tudíž lze vztah (2.8) zapsat ve tvaru

$$\int f(\phi(t)\, \phi'(t) \,\mathrm{d}t = \int f(x) \,\mathrm{d}x, \tag{2.9}$$

kde v integrálu na pravé straně po jeho výpočtu za x dosadíme $x = \phi(t)$. Připomeneme-li si pojem diferenciálu, můžeme tuto skutečnost vyjádřit názornějším vzorcem

$$\int f(\phi(t)) \,\mathrm{d}\phi(t) = \int f(x) \,\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

jenž je ekvivalentní s (2.9).

Diferenciálem funkce f v bodě x je výraz

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Z hlediska výpočtů je zde pohodlné tlumočit výraz „$f'(x)\,\mathrm{d}x$" jako „$f'(x)\cdot\mathrm{d}x$". Připomíná to také historické označení derivace: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, z něhož (2.11) obdržíme formálním vynásobením diferenciálem nezávisle proměnné $\mathrm{d}x$. Z diferenciály se pracuje, v podstatě, stejné jako s odpovídajícími derivacemi.

Shrnutím uvedených úvah obdržíme takovou větu.

VĚTA 2.9 (o integrací s pomocí substituce). Buďte f funkce spojitá na intervalu (a, b) a ϕ funkce definovaná na intervalu (α, β) a mající v každém jeho bodě derivaci, přičemž $\phi(t) \in (a, b)$ pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$. Potom pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platí uvedené výše rovnice (2.9), (2.10), dosadíme-li na jejich pravých stranách po výpočtu integrálu $x = \phi(t)$.

Toto znamená, že pokud má integrand tvar $f(\phi(t))\,\phi'(t)$ s nějakou diferencovatelnou funkcí ϕ, pak je výsledek jednoduše integrálem z f s dosazeným místo argumentu výrazem $\phi(t)$. Stačí tedy odvodit integrál z f.

Na vzorcích (2.9), (2.10) je založena tzv. *substituční* metoda vypočtu integrálu. Vztah $x = \phi(t)$ vyjadřuje zavedení nové proměnné t, což objasňuje název metody.

PŘÍKLAD 2.10. Vypočtěme $\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Řešení. Jelikož $\sin t$ je derivací výrazu $-\cos t$, lze napsat

$$\cos^3 t \sin t = \cos^3 t\,(-\cos t)' = -\cos^3 t\,(\cos t)',$$

což má tvar $f(\phi(t))\,\phi'(t)$ s $\phi(t) = \cos t$ a $f(s) = -s^3$. Proto dle vzorce (2.9) je

$$\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int \cos^3 t\,(\cos t)'\,\mathrm{d}t = -\int s^3\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{4}s^4 + C,$$

kde $s = \cos t$ a C je libovolná konstanta. Integrál je tedy vypočítán a zbývá se jen vrátit k původní proměnné t, t. j. v získaném výsledku za s dosadit $\cos t$:

$$\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos^4 t + C.$$

Téhož výsledku dosáhneme s využitím vzorce (2.10): položíme-li $\cos t = s$, bude $\mathrm{d}s = \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t$ a tudíž $\sin t\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}s$ a $\int \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int \cos^3 t\,\mathrm{d}(\cos t) = -\int s^3\,\mathrm{d}s$, což vede na již odvozený vzorec. □

§ 2.2.2. Způsoby využití metody substituce

Metody substituce, založené na rovnicích (2.9), (2.10), lze užít dvojím způsobem v závislosti na tom, ctěme-li rovnici zleva doprava nebo opačně.

1. způsob

Máme-li vypočíst integrál, jenž se podařilo upravit na tvar $\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ nebo, což je totéž, $\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$, pak ho s pomocí substituce $\phi(t) = x$ převedeme na integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, v němž pak po výpočtu zpětně dosadíme $x = \phi(t)$. Je-li možné $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočítat, bude úloha integrace vyřešena.

Úspěch tohoto postupu se určuje tím, zda se podaří výraz pod znakem integrálu vyjádřit ve tvaru $f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$ nalezením vhodné funkce ϕ. Je to obecně nesnadný ukol, vyžadující určité zkušenosti. V některých případech je volba substituce zcela zřejmá (typickým je příklad 2.10), v jiných hledání vhodné substituce vyžaduje úsilí.

2. způsob

Máme-li vypočíst integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme se pokusit najít vhodnou substituci $x = \phi(t)$ tak, aby výsledný integrál podle nové proměnné $\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}\phi(t)$ byl v něčem výhodnější než ten výchozí. Jestliže nový integrál dokážeme vypočíst, ve výsledku bude potřeba vykonat zpětnou substituci (vrátit se k původní proměnné x).

Poslední krok se zpětnou substitucí v sobě ukrývá určitou jemnost: ve výsledném integrálu totiž musíme všude vyjádřit t přes x, což není vždy možné, jelikož vykonaná substituce má tvar $x = \phi(t)$. Pro tento případ věta 2.9 vyžaduje upřesnění formou dodatečné podmínky, která požadovanou vlastnost zaručí.

VĚTA 2.11. Předpokládejme, že ϕ ve větě 2.9 zobrazuje (α, β) na (a, b).[2] Pak lze integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočíst s pomocí vzorců (2.9), (2.10), kde vlevo proměnnou t vyjádříme přes x podle rovnice $\phi(t) = x$.

Poznámka 2.12. Dodatečná podmínka věty 2.11 je jistě splněna, je-li ϕ monotonně rostoucí nebo klesající (pak bude zpětné vyjádření t přes x jednoznačné: $t = \phi^{-1}(x)$; obecně tomu tak být nemusí). Tento případ se v praxi vyskytuje nejčastěji.

Poznámka 2.13 (o provedení substituce v praxi). V praxi substituci v integrálu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

provádíme tak, že po zavedení nové proměnné vztahem typu $x = \phi(t)$ (anebo $t = \psi(x)$) původní proměnnou x v integrandu vyjádříme přes novou proměnnou t. Zároveň vyjádříme diferenciál $\mathrm{d}x$ přes $\mathrm{d}t$: je-li $x = \phi(t)$, bude $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$; pro substituci typu $t = \psi(x)$ zapíšeme $\mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$, kde v $\psi'(x)$ rovněž vyjádříme x přes t (v tomto kroku v konkretních případech může být výhodnější postupovat trochu jinak; pozorně se podívejte na příklad 2.15). Oboji pak formálně dosadíme do $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Po výpočtu se má provést substituce zpětná.

Samotná volba substituce je otázkou zkušenosti a v nemalé míře rovněž intuice. Pro vhodnost substituce $x = \phi(t)$ může hovořit přítomnost v integrálu výrazu $\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ nebo podobných členů.

PŘÍKLAD 2.14. Vypočtěme integrál $\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme-li $5x - 2 = t$, dostaneme $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(5x-2) = 5\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t$ a proto

$$\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x = \int t^{30}\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int t^{30}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{31}}{31} + C = \frac{1}{155}(5x-2)^{31} + C.$$

Poznamenejme, že užití substituce nám ušetřilo značné úsilí, jež bychom museli vynaložit při výpočtu tohoto integrálu roznásobením závorky a pak integrací a úpravou jednotlivých členů příslušného polynomu stupně 30:

$$\int (5x-2)^{30}\,\mathrm{d}x = \int (5^{30}\cdot x^{30} + \dots)\,\mathrm{d}x = 931322574615478515625\cdot\frac{x^{31}}{31} + \dots$$

[2]Toto znamená, že (a, b) je *právě* množinou všech hodnot $\phi(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, t. j. pro každý bod $x \in (a, b)$ platí $x = \phi(t)$ s nějakým $t \in (\alpha, \beta)$. Taková zobrazení se nazývají surjekce.

atd. $\square$

PŘÍKLAD 2.15. Vypočtěme integrál

$$\int xe^{-3x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Je zřejmé, že $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(-3x^2) = -3\cdot 2x\,\mathrm{d}x = -6x\,\mathrm{d}x$, odkud $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}(-3x^2)$. Pak bude[3]

$$\int e^{-3x^2}x\,\mathrm{d}x = \int e^{-3x^2}\left(-\frac{1}{6}\right)\mathrm{d}(-3x^2) = -\frac{1}{6}\int xe^{-3x^2}\,\mathrm{d}(-3x^2) = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C.$$

Poznamenejme, že zde bylo z praktického hlediska vhodné pro vyloučení proměnné x vyjádřit rovnou výraz $x\,\mathrm{d}x$, nikoliv zvlášť x a $\mathrm{d}x$. Jinak bychom museli vyjádřit x přes t: $x^2 = -\frac{1}{3}t$, $x = \pm\sqrt{-\frac{t}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-t}$ a použit tento vztah pro výpočet diferenciálu $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{-t}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{-t}\right)'\,\mathrm{d}t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{-t}}(-1)\,\mathrm{d}t,$$

kde znaménko v $\pm$ bereme stejné jako ve vzorci pro x. Pak bude

$$x\,\mathrm{d}x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-t}\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{-t}}\right)(-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t,$$

což jsme již dříve odvodili mnohem rychleji. Tento výpočet je však zcela zbytečný, neboť jsme potřebovali vyjádření pouze pro výraz $x\,\mathrm{d}x$ (jiné členy v integrálu totiž nejsou). $\square$

§ 2.2.3. Příklady

PŘÍKLAD 2.16. Vypočtete

$$\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Výraz upravme takto:

$$\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int(\arcsin x)^3\,\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{(\arcsin x)'}\,\mathrm{d}x.+$$

Nabízí se myšlenka položit $t = \arcsin x$, pak bude $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ a tudíž

$$\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(\arcsin x)^4 + C.$$

PŘÍKLAD 2.17. Vypočtěme

$$\int\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Připomeňme si goniometrický vzorec

$$1 + \mathrm{tg}^2\,x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{2.12}$$

[3]Provádíme-li odpovídající substituci explicitně, vychází $t = -3x^2$, $\mathrm{d}t = -6x\,\mathrm{d}x$, $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t$,

$$\int e^{-3x^2}x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}e^t + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C.$$

Zaveďme novou proměnnou t vztahem $x = \operatorname{tg} t$. Bude $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\operatorname{tg} t) = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{(1+x^2)^3} = (1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\cos^3 t}$ a dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,\mathrm{d}x = \int \cos^3 t \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t.$$

Nyní potřebujeme vykonat zpětnou substituci a se vrátit k původní proměnné. Vyjádřeme tedy $\sin t$ přes x s pomocí vzorce (2.12): $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \cos^2 t = 1 - \sin^2 t$,

$$\sin^2 t = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Ve výsledku obdržíme

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$