PŘEDNÁŠKA 3

Integrace racionální lomené funkce

§ 3.1. Racionální lomené funkce

DEFINICE 3.1. *Racionální lomená funkce* je funkce daná předpisem

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{3.1}$$

kde p je polynom stupně n a q je polynom stupně m.

Definičním oborem takové funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, kde $c_1, c_2, \dots, c_m$ jsou kořeny polynomu q ve jmenovateli vzorce (3.1).

§ 3.1.1. Ryze a neryze lomené funkce

DEFINICE 3.2. Racionální lomená funkce f se nazývá *ryze lomená*, je-li $n < m$. V ostatních případech (t. j. jestli $m \geq n$) říkáme, že je to funkce *neryze lomená*.

Např. funkce $\frac{3}{x-2}$, $\frac{x}{x^2+1}$, $\frac{x^2-x+3}{x^3+1}$ jsou ryze lomené a $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{x^3}{x^2+4}$ jsou neryze lomené.

VĚTA 3.3. Každou neryze lomenou racionální funkci lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

Toto lze vždy provést dělením polynomů.

PŘÍKLAD 3.4. Funkce daná předpisem $x \mapsto \frac{2x^3+3}{x^3+x}$ je neryze lomená. Vydělíme-li[1] polynom $2x^3 + 3$ polynomem $x^3 + x$:

$$\begin{array}{rr|l} 2x^3 \phantom{{}-2x} & +3 & x^3 + x \\ \cline{3-3} -2x^3 - 2x & & 2 \\ \cline{1-1} -2x + 3 & & \end{array}$$

obdržíme rozklad dané funkce na součet polynomiální a ryze lomené části:

$$\frac{2x^3+3}{x^3+x} = 2 + \frac{3-2x}{x^3+x}.$$

§ 3.1.2. Parciální zlomky

Pro nejjednodušší ryze lomené výrazy se užívá názvu parciální (nebo částečné) zlomky, a to z toho důvodu, že ty slouží jako jednotlivé části rozkladů libovolných ryze lomených výrazů. Uveďme jednoduchý příklad, na němž lze myšlenku snadno pochopit.

[1] Připomeňme si, že je postup při dělení polynomů podobný postupu při běžném ručním dělení čísel. Je potřeba oba dva polynomy upravit a seřadit mocniny sestupně. Pak pracujeme s koeficienty polynomů, v podstatě, jako kdyby to byla desetinná místa.

PŘÍKLAD 3.5. Zjednodušme lomený výraz

$$\frac{1}{x^2-1}.$$

Řešení. Jmenovatelem tohoto ryze lomeného výrazu je $(x-1)(x+1)$. Lze proto vyslovit hypotézu, že je $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$ pravděpodobně lineární kombinací výrazů $\frac{1}{x-1}$ a $\frac{1}{x+1}$:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Po úpravě na společného jmenovatele je zřejmé, že toto bude platit právě tehdy, když při *libovolném* x je

$$A(x+1) + B(x-1) = 1, \tag{3.2}$$

což znamená rovnost dvou lineárních polynomů. Dva polynomy jsou totožné právě tehdy, když mají stejné koeficienty. Přirovnáním koeficientů dostaneme $A + B = 0$, $A - B = 1$ a tudíž bude[2] $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Potom

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}, \tag{3.3}$$

což je hledaná lineární kombinace výrazů $\frac{1}{x-1}$ a $\frac{1}{x+1}$. □

Rovnost (3.3) je příkladem rozkladu ryze lomeného výrazu na součet elementárních ryze lomených výrazů (parciálních zlomků). Tento postup lze zobecnit na libovolné ryze lomené výrazy (věta 3.8).

DEFINICE 3.6. *Parciální zlomky* jsou ryze lomené výrazy následujících tvarů:

(1) $\dfrac{A}{(x-c)^k}$, kde $k = 1, 2, \dots$

(2) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, kde $k = 1, 2, \dots$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ má záporný diskriminant (t. j. $\alpha^2 - 4\beta < 0$)

PŘÍKLAD 3.7. Příklady parciálních zlomků jsou $\frac{2}{x+3}$, $\frac{-3}{(x-1)^3}$, $\frac{5x-1}{x^2+2}$, $\frac{x}{(x^2-x+1)^2}$. Naopak, $\frac{x-2}{x+3}$, $\frac{x^2}{x-1}$ parciálními zlomky nejsou.

Budiž $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ryze lomená.

VĚTA 3.8. Vyjádřeme $q(x)$ ve tvaru součinu výrazů typu $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^m$, kde $\alpha^2 < 4\beta$ (t. j. diskriminant je záporný). Pak platí

$$\frac{p(x)}{q(x)} = S, \tag{3.4}$$

kde S je součet nějakých parciálních zlomků, jejíchž typ a počet se určuje jednotlivými členy rozkladu jmenovatele $q(x)$ takto:

(1) obsahuje-li rozklad $q(x)$ člen $(x-c)^k$, pak je potřeba do S přidat vyraz

$$\frac{A_1}{x-c} + \frac{A_2}{(x-c)^2} + \dots \frac{A_k}{(x-c)^k}; \tag{3.5}$$

[2] Mohli bychom uvažovat i takto: vztah (3.2) má platit pro všechna x a tudíž, mimo jiné, i pro kořeny polynomu ve jmenovateli (čísla -1 a 1). Dosazením do (3.2) $x = \pm 1$ dostaneme $A + B = 0$, $A - B = 1$ atd.

(2) obsahuje-li rozklad $q(x)$ člen $(x^2+\alpha x+\beta)^k$, pak je potřeba do S přidat vyraz

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}. \tag{3.6}$$

Koeficienty A_1, B_1, A_2, B_2 atd. po převedení na společného jmenovatele vypočítáme z podmínky, že má platit (3.4).

Věta 3.8 znamená, že, zvolíme-li *správně* typy parciálních zlomků, jež do rozkladu S patří, pak neznámé koeficienty výpočtem vždy jednoznačně určíme tak, aby platila požadovaná rovnice (3.4).

Poznámka 3.9 (o určení koeficientů rozkladu na parciální zlomky). Neznámé hodnoty koeficientů v rozkladu na parciální zlomky vypočítáme řešením odpovídající soustavy lineárních algebraických rovnic. Tyto rovnice získáme jedním z následujících způsobů nebo jejich kombinací:

Přirovnáním koeficientů u mocnin. Součet parciálních zlomků převedeme na společného jmenovatele a přirovnáme čitatel k čitateli původního výrazu $\frac{p(x)}{q(x)}$. Vzniká tak rovnost dvou polynomů, jež platí, jsou-li sobě rovny koeficienty u jednotlivých mocnin x^0, x^1, x^2 atd. Přirovnáme-li odpovídající koeficienty z levé a pravé strany rovnosti, obdržíme soustavu rovnic pro určení hodnot koeficientů.

Dosazením kořenů jmenovatele. Soustavu rovnic pro určení hodnot koeficientů lze obdržet i tak, že do rovnosti čitatelů postupně dosadíme nějaké hodnoty x (nejlépe začít u kořenů jmenovatele, neboť tak řada členů ihned zmizí).

§ 3.1.3. Integrál racionální lomené funkce

Jsou to integrály tvaru

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde p je polynom stupně n a q je polynom stupně m (takový integrand se nazývá racionální lomenou funkcí). Není-li funkce ryze lomená (t. j. $n \geq m$), integrand dělením polynomů upravíme na součet polynomu a ryze lomené funkce. Polynomy se integrují velice snadno a tudíž stačí rozebrat pouze případ ryze lomené funkce, když platí $n < m$.

§ 3.1.3.1. Integrace ryze lomené funkce

Pro integraci ryze lomené funkce dle věty 3.8 vypočítáme její rozklad na součet parciálních zlomků,[3] jejichž integrály buď jsou tabulkové nebo se dají na tabulkové zredukovat (podrobněji viz § 3.1.3.2). Připomeneme si princip rozkladu na parciální zlomky.

TVRZENÍ 3.10. Vyjádříme-li jmenovatel $q(x)$ ve tvaru součinu výrazů typu $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ (kde $\alpha^2 < 4\beta$), rozkladem podílu $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky bude součet výrazů typu $\frac{D_1}{x-c}+\frac{D_2}{(x-c)^2}+\ldots\frac{D_k}{(x-c)^k}$, odpovídajících každému výskytu v rozkladu členu $(x-c)^k$, a výrazů typu $\frac{A_1x+B_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, jež odpovídají členům $(x^2+\alpha x+\beta)^k$.

Koeficienty se v různých parciálních zlomcích liší a jejich hodnoty je třeba vypočítat z podmínky, že všechny vypsané členy mají v součtu dávat původní funkci (převedeme vše na společného jmenovatele a zajistíme, aby byl čitatel rovný $p(x)$).

[3] *Parciální zlomky* jsou nejjednodušší ryze lomené funkce typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ nebo $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, kde $k=1,2,\ldots$ a polynom $x^2+\alpha x+\beta$ má záporný diskriminant (t. j. $\alpha^2-4\beta<0$); viz § 3.1.2.

Poznamenejme, že jmenovatelé $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ zde popisují všechny možné typy členů v rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů, když ho zapisujeme bez použití komplexních čísel.

Dovedeme-li nalézt kořeny polynomu ve jmenovateli ryze lomeného výrazu, jeho integraci pomocí tvrzení 3.10 můžeme vždy zredukovat na integraci parciálních zlomků.

PŘÍKLAD 3.11. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2}.$$

Řešení. V příkladě 3.5 jsme odvodili,[4] že pro integrand platí rozklad (3.3) a tudíž

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Vzorec (3.7) platí v intervalech, neobsahujících body 1 a -1. Pak dle (3.7)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{a}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

Poslední rovnost platí v intervalech, neobsahujících a a $-a$. □

PŘÍKLAD 3.12. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}.$$

Řešení. Jedná se o integraci ryze lomené funkce, využijme tedy rozkladu integrandu na parciální zlomky dle tvrzení 3.10. Rozklad polynomu ve jmenovateli na součin reálných kořenových činitelů je $(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ a proto dle tvrzení 3.10 lze zvolit příslušné konstanty tak, aby platilo

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Po převedení výrazů vpravo na společného jmenovatele obdržíme, že pro všechna x musí být

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1). \tag{3.8}$$

Dosadíme-li[5] do této rovnosti kořeny jmenovatele $x = 1$ a $x = -1$, obdržíme rovnice $1 = 4A$, $1 = -4B$, odkud ihned $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Zbývá tedy určit hodnoty C, D.

Jelikož to, že pro všechna x platí (3.8), znamená rovnost dvou polynomů, musí tyto polynomy mít stejné koeficienty. U polynomu na pravé straně rovnice (3.8) koeficient u x^0 je $A - B + D$ a koeficient u x^1 je $A + B - C$ (je-li členů více, můžeme pro pohodlí tohoto výpočtu závorky roznásobit). Na levé straně (3.8) však je konstanta 1, což je polynom stupně 0. Proto musí být $A - B + D = 0$, $A + B - C = 0$. Dosadíme-li již vypočtené hodnoty A, B, dostaneme $\frac{1}{2} + D = 0$, $-C = 0$ a tudíž $D = -\frac{1}{2}$, $C = 0$. V rozkladu na parciální zlomky (3.8) jsou tedy známy všecky koeficienty, což umožňuje integrál převést na součet jednodušších integrálů

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.\end{aligned}$$

---

[4] Mohli bychom, samozřejmé, i bezprostředně rozložit na parciální zlomky $\frac{1}{x^2-a^2}$.

[5] Jelikož má daný vztah platit pro *všechna* x, pak zcela jistě i pro kořeny polynomu ve jmenovateli. Dosazení těchto kořenů je výhodné, samozřejmě, proto, že se takto odstraní všechny členy s příslušnými kořenovými činiteli.

Poznamenejme, že místo shrnutí členů se stejnou mocninou bychom mohli rovnice pro C, D obdržet dosazením do (3.8) nějakých čísel, i když další reálné kořeny jmenovatele k dispozici nemáme (žádné členy s kořenovými činiteli v tomto případě nezmizí). Např. při $x = 2$ bude $1 = 15A + 5B + 3(2C + D)$. Dosazením 0 vždy dostaneme rovnost konstantních členů; zde bude $1 = A - B - D$, pročež $D = A - B - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Dosadíme-li nalezené A, B, D do předchozí rovnice, dostaneme $1 = \frac{5}{2} + 6C - \frac{3}{2}$, $C = 0$. □

Poznámka 3.13 (o způsobu určení neznámých koeficientů u parciálních zlomků). Koeficienty vždy můžeme vypočíst tak, že přirovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin na obou stranách rovnosti (v případe, kdy polynom ve jmenovateli má komplexní kořeny, se tomu nevyhneme). Dosazení kořenů jmenovatele výpočet urychluje (typickým je příklad 3.12).

§ 3.1.3.2. Integrace parciálních zlomků

Podle hořejšího lze výpočet integrálu ryze lomené funkce převést na integraci příslušných parciálních zlomků, dokážeme-li rozložit jmenovatel na součin kořenových činitelů; pak lze považovat úlohu integrace za vyřešenou. Je tedy potřeba umět integrovat jednotlivé parciální zlomky.

Parciální zlomky 1. druhu

Integrace parciálních zlomků 1. druhu $\frac{A}{(x-c)^k}$ (definice 3.6) je vždy jednoduchá:

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\ln|x-c| & \text{pro } k = 1; \\ A\int (x-c)^{-k}\,\mathrm{d}(x-c) = \frac{A}{1-k}(x-c)^{1-k} & \text{pro } k > 1. \end{cases}$$

Parciální zlomky 2. druhu

U parciálních zlomků 2. druhu $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, $k = 1, 2, \dots$, bývá integrace technicky složitější, ovšem také je vždy možná. V praxi zvláště často potkáváme rozklady na parciální zlomky, skládající se z členů typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ a $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$.

Případ $k = 1$

Jedná se o parciální zlomek $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$, kde je diskriminant polynomu $x^2 + \alpha x + \beta$ záporný:[6] $\alpha^2 < 4\beta$ a polynom proto lze převést na tvar součtu čtverců. Standardními úpravami dostaneme[7]

$$x^2 + \alpha x + \beta = (x + \xi)^2 + \eta^2,$$

kde je $\xi = \frac{1}{2}\alpha$, $\eta = \sqrt{\beta - \frac{1}{4}\alpha^2}$, a integrál zapíšeme ve tvaru

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ve jmenovateli je polynom kvadratický a v čitateli — polynom lineární. Upravme tedy lomený výraz tak, aby v čitateli vznikla derivace jmenovatele $\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)' = 2(x+\xi) = 2x + \alpha$:

$$\frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\,\frac{2x+\frac{2B}{A}}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\,\frac{2x+\alpha+\frac{2B}{A}-\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}.$$

[6] V opačném případě bychom dovedli tento polynom dále rozložit na součin reálných kořenových činitelů a tím úlohu zredukovat na předchozí případ parciálních zlomků 1. druhu.

[7] $x^2 + \alpha x + \beta = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha + \beta = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 + \beta - \frac{1}{4}\alpha^2 = \left(x - \frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \beta - \frac{1}{4}\alpha^2$.

Při integrací dostaneme součet dvou integrálů

$$\int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A}-\alpha\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2},$$

přičemž obojí dovedeme vypočítat:

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left((x+\xi)^2+\eta^2\right)'}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left((x+\xi)^2+\eta^2\right)$$

a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{\eta}\operatorname{arctg}\frac{x+\xi}{\eta}.$$

Integrál $\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$ tedy je lineární kombinací členů s logaritmem jmenovatele a arcus tangens posunutého argumentu.

Případ $k > 1$

V případě, když $k > 1$, je výpočet integrálu $\int \frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x$ technicky složitější (pro komplikované výpočty se takovými případy zabývat nebudeme; vzorce však lze dle potřeby nalézt v literatuře).

Vyčleníme-li v $Ax+B$ derivaci $(x^2+\alpha x+\beta)' = 2x+\alpha$, můžeme integrál

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x$$

vypočíst substitucí $x^2+\alpha x+\beta = t$. Při úpravě však vzniká také integrál tvaru

$$I_k(x) = \int \frac{1}{(x^2+\eta^2)^k}\,\mathrm{d}x.$$

Pro tyto integrály lze odvodit rekurentní formuli, vyjadřující $I_k(x)$ přes $I_{k-1}(x)$.

PŘÍKLAD 3.14. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{3x^3+x^2-9x-3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dělení polynomů

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +x^2 & -9x & -3 & x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & -3x^2 & -3x & & 3x-2 \\ \cline{1-3}
 & -2x^2 & -12x & -3 & \\
 & 2x^2 & +2x & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & -10x & -1 &
\end{array}$$

dává

$$\frac{3x^3+x^2-9x-3}{x^2+x+1} = 3x-2-\frac{10x+1}{x^2+x+1}.$$

Pak bude

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3+x^2-9x-3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \int (3x-2)\,\mathrm{d}x - \int \frac{10x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}x^2-2x-\int \frac{10x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Polynom x^2+x+1 má záporný diskriminant a se převádí na součet čtverců: $x^2+x+1 = x^2+2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$. Derivací x^2+x+1 je $(x^2+x+1)' = 2x+1$, proto poslední integrál upravme takto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{10x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{2x+\frac{1}{5}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= 5\int \frac{2x+1-1+\frac{1}{5}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 5\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{-\frac{4}{5}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 5\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - 4\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 5\ln(x^2+x+1) - 4\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pro $\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x$ bude

$$\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Využili jsme vzorce

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$