PŘEDNÁŠKA 4

Integrál racionální lomené funkce a integrály, jež se na něj převádí

Z neryze lomené funkce lze dělením polynomů vyčlenit polynomiální část, ve zbytku pak obdržíme funkci ryze lomenou. Výpočet integrálu ryze lomené funkce lze převést na integraci parciálních zlomků, dokážeme-li rozložit jmenovatel na součin kořenových činitelů; pak lze považovat úlohu integrace za vyřešenou. Je tedy potřeba umět integrovat jednotlivé parciální zlomky.

§ 4.1. Integrace parciálních zlomků

Parciální zlomky 1. druhu

Integrace parciálních zlomků 1. druhu $\frac{A}{(x-c)^k}$ je jednoduchá:

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\ln|x-c| & \text{pro } k=1; \\ A\int (x-c)^{-k}\,\mathrm{d}(x-c) = \frac{A}{1-k}(x-c)^{1-k} & \text{pro } k>1. \end{cases}$$

Parciální zlomky 2. druhu

U parciálních zlomků 2. druhu $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, $k=1,2,\dots$, bývá integrace technicky složitější, ovšem také je vždy možná. V praxi zvláště často potkáváme rozklady na parciální zlomky, skládající se z členů typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ a $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$.

Případ $k=1$

Jedná se o parciální zlomek $\frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}$, kde je diskriminant polynomu $x^2+\alpha x+\beta$ záporný:[1] $\alpha^2<4\beta$ a polynom proto lze převést na tvar součtu čtverců. Standardními úpravami dostaneme[2]

$$x^2+\alpha x+\beta = (x+\xi)^2+\eta^2,$$

kde je $\xi=\frac{1}{2}\alpha$, $\eta=\sqrt{\beta-\frac{1}{4}\alpha^2}$, a integrál zapíšeme ve tvaru

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ve jmenovateli je polynom kvadratický a v čitateli — polynom lineární. Upravme tedy lomený výraz tak, aby v čitateli vznikla derivace jmenovatele $\big((x+\xi)^2+\eta^2\big)'=2(x+\xi)=2x+\alpha$:

$$\frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\frac{2x+\frac{2B}{A}}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{A}{2}\frac{2x+\alpha+\frac{2B}{A}-\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}.$$

[1] V opačném případě bychom dovedli tento polynom dále rozložit na součin reálných kořenových činitelů a tím úlohu zredukovat na předchozí případ parciálních zlomků 1. druhu.

[2] $x^2+\alpha x+\beta = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha+\beta = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2+\beta-\frac{1}{4}\alpha^2 = \left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\beta-\frac{1}{4}\alpha^2.$

Při integrací dostaneme součet dvou integrálů

$$\int \frac{Ax+B}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A}-\alpha\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2},$$

přičemž obojí dovedeme vypočítat:

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left((x+\xi)^2+\eta^2\right)'}{(x+\xi)^2+\eta^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left((x+\xi)^2+\eta^2\right)$$

a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{(x+\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{\eta}\operatorname{arctg}\frac{x+\xi}{\eta}.$$

Integrál $\int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$ tedy je lineární kombinací členů s logaritmem jmenovatele a arcus tangens posunutého argumentu.

Případ $k > 1$

V případě, když $k > 1$, je výpočet integrálu $\int \frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x$ technicky složitější (pro komplikované výpočty se takovými případy zabývat nebudeme; vzorce však lze dle potřeby nalézt v literatuře).

Vyčleníme-li v $Ax+B$ derivaci $(x^2+\alpha x+\beta)' = 2x+\alpha$, můžeme integrál

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,\mathrm{d}x$$

vypočíst substitucí $x^2+\alpha x+\beta = t$. Při úpravě však vzniká také integrál tvaru

$$I_k(x) = \int \frac{1}{(x^2+\eta^2)^k}\,\mathrm{d}x.$$

Pro tyto integrály lze odvodit rekurentní formuli, vyjadřující $I_k(x)$ přes $I_{k-1}(x)$.

PŘÍKLAD 4.1. Odvoďme vzorec pro

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrací po částech v $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &= \int \overbrace{\frac{1}{x^2+a^2}}^{u}\cdot\overbrace{1}^{v'}\,\mathrm{d}x = \overbrace{\frac{1}{x^2+a^2}}^{u}\overbrace{x}^{v} - \int \overbrace{\left(-2x\left(x^2+a^2\right)^{-2}\right)}^{u'}\overbrace{x}^{v}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x - 2a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

odkud

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

Příklady

PŘÍKLAD 4.2. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 9x - 3}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dělení polynomů

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & + x^2 & - 9x & - 3 & x^2 + x + 1 \\ \cline{5-5} -3x^3 & - 3x^2 & - 3x & & 3x - 2 \\ \cline{1-3} & -2x^2 & - 12x & - 3 & \\ & 2x^2 & + 2x & + 2 & \\ \cline{2-4} & & -10x & - 1 & \end{array}$$

dává

$$\frac{3x^3 + x^2 - 9x - 3}{x^2 + x + 1} = 3x - 2 - \frac{10x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Pak bude

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 + x^2 - 9x - 3}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int (3x - 2)\,\mathrm{d}x - \int \frac{10x + 1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 2x - \int \frac{10x + 1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Polynom $x^2 + x + 1$ má záporný diskriminant a se převádí na součet čtverců: $x^2 + x + 1 = x^2 + 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Derivací $x^2 + x + 1$ je $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, proto poslední integrál upravme takto:

$$\begin{aligned} \int \frac{10x + 1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x &= 5\int \frac{2x + \frac{1}{5}}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{2x + 1 - 1 + \frac{1}{5}}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= 5\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{-\frac{4}{5}}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= 5\int \frac{\mathrm{d}(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - 4\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= 5\ln(x^2 + x + 1) - 4\int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pro $\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x$ bude

$$\int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Využili jsme vzorce

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right),$$

jenž se dokáže velice snadno: $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$ (substituce $\frac{x}{a} = t$, $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$). $\square$

Obsahuje-li rozklad jmenovatele na součin více kvadratických polynomů se záporným diskriminantem (což znamená, že má násobné komplexní kořeny), je rozklad na parciální zlomky obtížnější. Takové případy pro zdlouhavé technické výpočty rozebírat nebudeme. Na ukázku uveďme jeden příklad, na kterém získáme i obecnou představu o těchto integrálech.

PŘÍKLAD 4.3. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$$

Řešení. Výraz v integrandu je ryze lomený, ve jmenovateli je polynom sudého stupně x^4+1, jenž reálné kořeny nemá. Jeho rozklad na součin v reálném oboru tedy je

$$x^4+1 = \left(x^2+\alpha_1 x+\beta_1\right)\left(x^2+\alpha_2 x+\beta_2\right),$$

kde kvadratické polynomy v závorkách mají záporné diskriminanty. Přirovnáním koeficientů u x^3, x^0 dostaneme $\alpha_1+\alpha_2=0$, $\beta_1\beta_2=1$. Koeficienty u x^2 jsou $\beta_1+\beta_2+\alpha_1\alpha_2=0$. Nakonec, přirovnáme-li koeficienty u x^1, dostaneme $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0$. Jelikož $\alpha_2=-1$, $\beta_1\beta_2=1$, musí být $\beta_1=\beta_2=1$. Pak $\alpha_1^2=2\beta_1=2$. Zvolme $\alpha_1=\sqrt{2}$, pak bude $\alpha_2=-\sqrt{2}$ a tudíž

$$x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

Rozkladem daného lomeného výrazu na parciální zlomky tedy bude

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Pro všechna x musí platit $(A_1x+B_1)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(A_2x+B_2)(x^2+\sqrt{2}x+1)=1$. Přirovnáním koeficientů u x^3, x^0 dostaneme $A_1+A_2=0$, $B_1+B_2=1$, t. j. $A_2=-A_1$, $B_2=1-B_1$. Rovnicemi koeficientů u x^2, x^1 jsou

$$B_1+B_2+\sqrt{2}(A_2-A_1)=0,\quad A_1+A_2+\sqrt{2}(B_2+B_1)=0, \tag{4.1}$$

což po dosazení předchozího dává $B_1=B_2=\frac{1}{2}$. Z první rovnice v (4.1) pak bude $A_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $A_2=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ a tudíž

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Pro polynomy ve jmenovatelích standardní úpravou obdržíme $x^2\pm\sqrt{2}x+1=\left(x\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}$. Pokračujeme pak integrací parciálních zlomků:

$$\begin{aligned}
\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)
\end{aligned}$$

a podobně

$$\int\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right).$$

Dosazením do (4.2) obdržíme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right).$$

§ 4.2. Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály, v nichž integrand je lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

lze vždy převést na integrál racionální lomené funkce anebo — v určitých případech — i bezprostředně vypočíst s pomocí vhodných úprav integrandu. Začněme u příkladů.

§ 4.2.1. Motivační příklady

PŘÍKLAD 4.4. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\Big(\frac{x}{2}\Big)$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\Big(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big) = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

PŘÍKLAD 4.5. Vypočtěme

$$\int \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dle vzorců $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ bude

$$\int \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}\,\mathrm{d}x$$

atd. (opět využijeme $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$).

Zobecněním těchto úvah je univerzální trigonometrická substituce.

§ 4.2.2. Univerzální trigonometrická substituce

Pro integrály tvaru (4.3), kde R je racionální lomenou funkcí podle každého z argumentů, lze využít *univerzální trigonometrické substituce*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{4.4}$$

kde t značí novou proměnnou. Hodnoty t vezměme v mezích $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Pro vykonání v integrálu (4.3) substituce (4.4) musíme získat vyjádření $\sin x$, $\cos x$ přes t a $\mathrm{d}x$ přes $\mathrm{d}t$. Jelikož (4.4) je ekvivalentní s rovností $x = 2\operatorname{arctg} t$, pro diferenciály platí vztah[3]

[3]Tentýž vztah lze obdržet i přímo z (4.4): $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 + t^2\right)\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Vzhledem k tomu, že platí

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

integrál tak převedeme na integrál racionální lomené funkce, a to pomocí následujících vzorců.

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}. \tag{4.5}$$

Z (4.5) ihned plyne, že $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$, t. j. po zavedení nové proměnné t substitucí (4.4) převedeme všecky výskyty trigonometrických funkcí v integrandu na racionální lomené výrazy proměnné t, přičemž podobný výraz vznikne i po přepočtu diferenciálu. Po vypočtu upraveného integrálu použijeme (4.4) a vrátíme se k původní proměnné x.

PŘÍKLAD 4.6. Vypočtěme

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme-li substituci (4.4), podle vzorců (4.5) obdržíme

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2t - (1+t^2)}{1 - t^2 + 2(1+t^2)}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= -2\int \frac{t^2 - 2t + 1}{3 + t^2}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.$$

V integrandu je ryze lomená funkce, jíž můžeme dále rozložit na součet příslušných parciálních zlomků:

$$\frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3} = \frac{(At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}.$$

Potřebujeme tedy, aby pro libovolné t platilo

$$(At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1) = t^2 - 2t + 1.$$

Přirovnáním koeficientů u t^0, t^1, t^2 a t^3 obdržíme podmínky[4]

$$3B + D = 1, \quad 3A + C = -2, \quad B + D = 1, \quad A + C = 0,$$

odkud vypočítáme $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$. Pak

$$-2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{t+1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}.$$

Máme $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$, $\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1} = \ln(t^2+1)$, $\int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \ln(t^2+3)$, až na aditivní konstantu, jíž k výsledku přidáme později. Potom

$$-2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t = \ln(t^2+1) - \ln(t^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

[4]První podmínku, jež odpovídá koeficientům u t^0, lze vždy odvodit také dosazením hodnoty $t = 0$.

$$= \ln \frac{t^2+1}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right). \tag{4.6}$$

Teď již zbývá jenom dosadit do (4.6) vyjádření t přes x ze substituce (4.4) a přidat integrační konstantu. Ve výsledku dostaneme:[5]

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2} \, \mathrm{d}x = \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + K, \tag{4.8}$$

kde K je integrační konstanta. □

[5] Často se stává, že výsledky integrace při použiti poněkud odlišných úprav se zdánlivě liší. Např. všimneme-li si, že dle (4.4) $t^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$, obdržíme

$$\ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3} = \ln \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 2} = \ln \frac{1}{1 + 2\cos^2 \frac{x}{2}} = \ln 1 - \ln\left(1 + 2\cos^2 \frac{x}{2}\right) = -\ln(\cos x + 2)$$

a proto lze výsledek integrace (4.8) přepsat do tvaru

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2} \, \mathrm{d}x = -\ln(\cos x + 2) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + K. \tag{4.7}$$