PŘEDNÁŠKA 5

Integrály, jež se převádí na integrál racionální lomené funkce

Zde rozebereme některé typy integrálů, jež lze převést na integrál racionální lomené funkce (tzv. „racionalizovat“).

§ 5.1. Integrály typu $\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x})\,\mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tvaru

$$\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x,$$

kde R je racionální lomená funkce, lze vypočíst zavedením nové proměnné $t = e^{\alpha x}$. Dostaneme $\mathrm{d}t = \alpha e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ a tudíž

$$\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{t}R(t)\,\mathrm{d}t,$$

což je integrálem racionální lomené funkce. Podobným způsobem lze upravit integrál tvaru

$$\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x})\,\mathrm{d}x,$$

v němž R je racionální lomená funkce n proměnných a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou celá čísla: položíme-li $t = e^x$, bude $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$,

$$\int R(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x})\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}R(t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_n})\,\mathrm{d}t, \tag{5.1}$$

kde pak opět integrujeme výraz racionální lomený. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ soudělná, je vhodné položit $t = e^{\alpha x}$, kde α je největší společný dělitel těchto čísel.

V případě racionálních $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ po vykonání stejné substituce vzniknou v (5.1) odmocniny t; bude to integrál typu $\int R(x, \sqrt[m_1]{x^{r_1}}, \sqrt[m_2]{x^{r_2}}, \dots, \sqrt[m_n]{x^{r_n}})\,\mathrm{d}x$, kde m_1, r_1, m_2, $\dots$, m_n, r_n jsou přirozená čísla (viz § 5.3).

PŘÍKLAD 5.1. Vypočtěme

$$\int \frac{e^{6x}+3}{e^{3x}+6}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položíme-li $t = e^{3x}$ (neboli, což je totéž, $x = \frac{1}{3}\ln t$), bude $\mathrm{d}x = \frac{1}{3t}\,\mathrm{d}t$ a tudíž

$$\int \frac{e^{6x}+3}{e^{3x}+6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{t^2+3}{t+6}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{t^2+3}{t\,(t+6)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \left(1 - 3\frac{2t-1}{t\,(t+6)}\right)\mathrm{d}t,$$

protože $\frac{t^2+3}{t^2+6t} = 1 + \frac{3-6t}{t^2+6t}$. Rozkladem $\frac{2t-1}{t(t+6)}$ na částečné zlomky je $\frac{3t-1}{t(t+9)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{t} + \frac{13}{6}\frac{1}{t+6}$ a proto $\int \frac{2t-1}{t(t+6)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\ln|t| + \frac{13}{6}\ln|t+6|$. Po výpočtu a dosazení $t = e^{3x}$ dostaneme

$$\int \frac{e^{9x}+3}{e^{3x}+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{13}{6}\ln|t+6| = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}x - \frac{13}{6}\ln\left(e^{3x}+6\right).$$

§ 5.2. Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x)$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály, v nichž integrand je lomenou funkcí členů $\cos x$ a $\sin x$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.2}$$

lze vždy převést na integrál racionální lomené funkce anebo — v určitých případech — i vypočíst bezprostředně s pomocí elementárních úprav integrandu.

§ 5.2.1. Univerzální trigonometrická substituce

S pomocí *univerzální trigonometrické substituce*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{5.3}$$

kde $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, integrál tvaru (5.2), kde R je racionální lomenou funkcí podle každého z argumentů, převedeme na integrál racionální lomené funkce. Využité v názvu slovo „univerzální“ zdůrazňuje to, že tato substituce je účinná pro jakýkoliv integrál typu (5.2).

Univerzální trigonometrickou substituci $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ provádíme podle vzorců

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}, \tag{5.4}$$

jež se snadno odvodí takto: $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$,

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

§ 5.2.2. Speciální případy

Pro některé často využívané typy integrálů, jež jsou speciální případy (5.2), lze pro integraci doporučit určité specifické techniky.

§ 5.2.2.1. Speciální trigonometrické substituce

Užití univerzální substituce (5.3) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem a proto je vhodné se napřed zamyslet, zda není možné integrál vypočíst snadněji. Často je užitečná následující rada.

ÚVAHA 5.2. Je-li integrál ve tvaru (5.2), kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů, mající jednu z vlastností:

$$R(-u,v) = -R(u,v), \quad R(u,-v) = -R(u,v), \quad R(-u,-v) = R(u,v) \tag{5.5}$$

pro všechna (u,v), pak lze pro integraci využit jedné ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$ resp. $t = \operatorname{tg} x$.

Substituce, doporučená úvahou 5.2, může být v praxi vhodnější než univerzální trigonometrická substituce (5.3).

PŘÍKLAD 5.3. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Uveďme tři způsoby řešení (všimněme si různých tvarů výsledků!).

Řešení 5.3.1. Integrand je racionální funkcí výrazu $\cos x$ a tudíž lze využit obecnou trigonometrickou substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Dle vzorců (5.4) obdržíme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{t^2+1} \,\mathrm{d}t = 2 \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

U integrálu $\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ rozkladem na částečné zlomky dostáváme $\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \end{aligned} \tag{5.6}$$

a tudíž

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= 2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\right| \\ &= \ln\left|\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right| \\ &= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right|. \end{aligned}$$

Řešení 5.3.2. Po vynásobení čitatele a jmenovatele členem $\cos x$ vzniká myšlenka zavést novou proměnnou vztahem $s = \sin x$. Tuto substituci doporučuje i úvaha 5.2, jelikož $R(u,v) = 1/u$ je lichou funkcí podle u. Bude

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}s}{1-s^2}.$$

Pro poslední integrál použijme (5.6):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|.$$

PŘÍKLAD 5.4. Vypočtěme integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení 5.4.1. Využití univerzální substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ dle vzorců (5.4) vede na integrál

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{8t^3}{(1+t^2)^3}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 16\int \frac{t^3\left(1-t^2\right)^2}{(1+t^2)^6}\,\mathrm{d}t.$$

Dostáváme tedy integrál neryze lomené funkce, přičemž i po vyčlenění ryze lomené části zůstává úloha výpočetně náročnou jakožto integrace parciálního zlomku s vysokým stupněm jmenovatele bez reálných kořenů. Zkusme proto raději najít jinou cestu.

Řešení 5.4.2. Daný integrál má tvar (5.2) s $R(u, v) = u^2 v^3$. Funkce R je lichá podle v a tudíž dle úvahy 5.2 použijme substituci $t = \cos x$. Dostaneme $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$, $+\sin x = -\mathrm{d}t$,

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \sin^2 x \overbrace{\sin x \,\mathrm{d}x}^{-\mathrm{d}t} = -\int t^2 \left(1 - t^2\right) \mathrm{d}t = \int t^4 \,\mathrm{d}t - \int t^2 \,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x,$$

což je výrazné jednodušší než příslušná integrace v řešení 5.4.1. □

§ 5.2.2.2. Integrály $\int \sin^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x$, kde n, m jsou celá čísla

Integrály z příkladů 5.3, 5.4 jsou typu

$$\int \sin^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x,$$

kde n, m jsou celá čísla. Je to speciální případ integrálu (5.2) a tudíž lze pro takový integrál vždy využít univerzální trigonometrické substituce. V některých případech však lze najít méně náročné a tudíž i lepší řešení. Mimo jiné, lze často využit speciální trigonometrické substituce dle úvahy 5.2.

Případ, když jedno z čísel n, m je liché

Je-li $n = 2k + 1$, lze napsat $\sin^n x = \sin^{2k} x \sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)^k \sin x$ a zavést substituci $t = \cos x$. Dostaneme $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$, $\sin x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$,

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^m x \overbrace{\sin x \,\mathrm{d}x}^{-\mathrm{d}t} = \int \left(1 - t^2\right)^k t^m \,\mathrm{d}t,$$

kde integrandem je racionální lomená funkce (při kladných k, m polynom). Podobně tomu v případě lichého m využijeme substituce $t = \sin x$.

Případ, když obě čísla n, m jsou sudá nebo lichá

V tomto případě dle úvahy 5.2 lze aplikovat substituci $t = \operatorname{tg} x$ (anebo $t = \operatorname{cotg} x$). Jsou-li n, m sudá, integrand obsahuje jen sudé mocniny kosinu a sinu, přičemž každá z nich — a rovněž i diferenciál $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \mathrm{d}x$ — se racionálně vyjadřují přes $\operatorname{tg} x$ s pomocí vzorců

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \tag{5.7}$$

V případě, když jsou obě čísla n, m lichá kladná, má integrand tvar

$$\sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x = \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x = \sin^{2k} x \cos^{2l} x \operatorname{tg} x \cos^2 x,$$

kde lze opět využít vzorců (5.7).Je-li jedno z čísel n, m záporné, lze v integrandu vyčlenit výraz $\frac{\sin x}{\cos x}$ anebo $\frac{\cos x}{\sin x}$, což rovněž vede na hořejší substituci.

Případ, když n, m jsou sudá a nezáporná

V tomto případě se integrand skládá z přirozených mocnin výrazů $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$. S pomocí vzorců

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2x\right), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2x\right) \mathrm{d}x \tag{5.8}$$

lze tyto mocniny snížit o polovinu, což další výpočty zjednoduší.

Případ záporných n, m

Je-li $n = -k$, $m = -l$ s kladnými k a l, lze mocniny členů ve jmenovateli snížit úpravou

$$\int \frac{1}{\sin^k x \cos^l x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^k x \cos^l x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^{k-2} x \cos^l x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^k x \cos^{l-2} x}\,\mathrm{d}x.$$

§ 5.3. Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tohoto druhu lze převést na integrál racionální lomené funkce zavedením nové proměnné t s pomocí substituce

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{5.9}$$

Pro realizaci substituce potřebujeme sestrojit i substituci zpětnou, t. j. vyjádřit x přes t: $t^m(\gamma x + \delta) = \alpha x + \beta$, $(\gamma t^m - \alpha) = \beta - \delta t^m$,

$$x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha}$$

a vypočíst diferenciál: $\mathrm{d}x = \left(\frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha}\right)' \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}x = \frac{-m\delta t^{m-1}(\gamma t^m - \alpha) - (\beta - \delta t^m)\gamma m t^{m-1}}{(\gamma t^m - \alpha)^2}\,\mathrm{d}t = m\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma t^m - \alpha)^2} t^{m-1}\,\mathrm{d}t.$$

Substituci lze provést, je-li $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ (v opačném případě $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\lambda\beta x+\beta}{\lambda\delta x+\delta} = \frac{\beta}{\delta}$; znamená to však, že se jedná o integrand, v němž $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ fakticky není).

PŘÍKLAD 5.5. Vypočtěme

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x} + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dle doporučeného vzorce (5.9) položme $x = t^3$. Pak bude $\mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$, $t = \sqrt[3]{x}$,

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{t+1} 3t^2\,\mathrm{d}t = 3\int \frac{t^5}{t+1}\,\mathrm{d}t,$$

což je integrálem neryze lomené funkce. Dělením polynomů t^5 a $t+1$ dostaneme

$$\frac{t^5}{t+1} = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

a proto

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt[3]{x} + 1}\,\mathrm{d}x &= 3\int \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3\ln|t+1| \\ &= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 3\ln|\sqrt[3]{x} + 1|.\end{aligned}$$

Podobným způsobem lze integrovat některé obecnější výrazy, obsahující více členů s radikály. Je-li v integrandu několik výrazů typu $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{q_1}$, $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{q_2}$, ..., kde $q_1, q_2, \ldots$ jsou racionální čísla, lze rovněž využít substituce (5.9), v níž zvolíme za m společný jmenovatel zlomků $q_1, q_2, \ldots$.

PŘÍKLAD 5.6. Vypočtěme

$$\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

Řešení. Zaveďme t vztahem $x = t^6$ (aby se „umocnilo“ jak $\sqrt[3]{x}$, tak i $\sqrt{x}$). Pak bude $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, a obdržíme integrál racionální lomené funkce proměnné t:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\int \frac{t^3}{t^2+1}t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Výraz $\frac{t^8}{t^2+1}$ není ryze lomený, proto z něj dělením vyčleníme polynomiální část:

$$\begin{array}{l|l}
t^8 & t^2+1 \\ \hline
-t^8-t^6 & t^6-t^4+t^2-1 \\ \hline
\quad -t^6 & \\
\quad\ \ t^6+t^4 & \\ \hline
\qquad\quad t^4 & \\
\qquad -t^4-t^2 & \\ \hline
\qquad\quad\ -t^2 & \\
\qquad\qquad t^2+1 & \\ \hline
\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}$$

a obdržíme $\frac{t^8}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$. Pak bude

$$\int \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1\right)\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t.$$

Po návratu k proměnné x dostaneme $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}} + \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}}\right)$. □

§ 5.3.1. Integrály typu $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,\mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce

Integrály tohoto typu se často vyskytují, jejich výpočet však je složitější. Pro $\alpha \neq 0$ je vhodné převést kvadratický polynom na součet nebo rozdíl čtverců: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left((x+\xi)^2 \pm a^2\right)$ v závislosti na tom, zda je jeho diskriminant kladný nebo záporný. Proto stačí umět pracovat s integrandy, obsahujícími členy typu $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$.

K úpravě a výpočtu těchto integrálů lze využit různých způsobů, jejichž podrobnější popis dle potřeby nalezneme v odborné literatuře. Pro obecnou představu zmiňme se stručně o jednom z možných postupů, jenž je založen na trigonometrických substitucích.

Integrál $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x$

Zavedeme-li proměnnou t vztahem $x = a\operatorname{tg} t$, bude $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$, $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ a dostaneme integrál typu $\int R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$.

PŘÍKLAD 5.7. Vypočtěme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

kde $a > 0$.

Řešení. Připomeňme si vzorec $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ a zaveďme substituci $x = a \operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{a}{\cos t}$ a $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, odkud

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{1}{\frac{a}{\cos t}} \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$

Pro $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ využijme řešení 5.3.1 příkladu 5.3:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right| + K = \ln\left|\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} + \operatorname{tg} t\right| + K$$

a tudíž

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln\left|\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + K = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2}\right| + K \\ &= \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, \qquad (5.10)\end{aligned}$$

kde $C = K - \ln a$. □

Integrál $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x$

Vezmeme-li $x = a \sin t$, podobně hořejšímu dostaneme $\mathrm{d}x = a \cos t\,\mathrm{d}t$, $a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2 \cos^2 t$ a dostaneme integrál typu $\int R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$.

PŘÍKLAD 5.8. Pro $a > 0$ vypočtěme integrál

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (5.11)$$

Řešení. Integrál má smysl pro $|x| \le a$. Položme $x = a \sin t$, kde $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Bude $\mathrm{d}x = a \cos t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$ ($a > 0$ a rovněž $\cos t \ge 0$ pro $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$) a dostaneme

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int a \cos t \cdot a \cos t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \int \cos 2t\,\mathrm{d}(2t) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{1}{2} a \sin t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.\end{aligned}$$

Integrál $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)\mathrm{d}x$

V tomto případě lze položit $x = \frac{a}{\cos t}$. Pak bude $x^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2$, $\mathrm{d}x = a \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ a dostaneme integrál typu $\int R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$.

PŘÍKLAD 5.9. Vypočtěme

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$.

Řešení. Položme $x = \frac{a}{\cos t}$. Bude $x^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2$, $\mathrm{d}x = a \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x &= a \int \operatorname{tg} t \cdot a \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = a^2 \int \operatorname{tg} t \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t} \cos t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{\sin^2 t}{(1 - \sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}(\sin t) \\
&= a^2 \int \frac{s^2}{(1 - s^2)^2}\,\mathrm{d}s = a^2 \int \frac{s^2 - 1 + 1}{(1 - s^2)^2}\,\mathrm{d}s \\
&= a^2 \int \frac{1}{(1 - s^2)^2}\,\mathrm{d}s - a^2 \int \frac{1}{1 - s^2}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

kde po substituci $\sin t = s$ jsme dostali integrály parciálních zlomků. Integrál se takto podařilo racionalizovat. Vzhledem k nutnosti pracovat s parciálními zlomky v druhé mocnině je však pro výpočet tohoto integrálu vhodnější využít jiného postupu. Ve výpočtech tedy pokračovat nebudeme.