PŘEDNÁŠKA 6

Integrál určitý

Pojmy primitivní funkce a integrálu neurčitého jsme zavedli při popisu operace opačné k derivování. Historicky však pojem primitivní funkce vznikl ve spojení s otázkou určení obsahu plochy rovinného útvaru, což vede na integrál určitý. Nyní se budeme zabývat integrálem určitým. Ukáže se, že oba dva pojmy spolu úzce souvisí, přičemž je dokonce přirozeněji tyto pojmy zavádět v opačném pořadí.

Mluvíme-li o obsahu nějaké plochy, v elementární geometrii si obvykle představujeme trojúhelník, obdélník a obecněji různé útvary, jež lze z trojúhelníků sestavit. Jinak tomu je u vzorce pro obsah kruhu, avšak i ten se odvodil s pomocí konstrukce sjednocení „nekonečně úzkých“ trojúhelníkových výsečí (byl v tom, samozřejmě, přechod k limitě). Pojem integrálu určitého zobecňuje myšlenku určení obsahu přibližným rozkladem figury na elementární dílce a jeho postupným zjemněním.

§ 6.1. Primitivní funkce a obsah plochy pod křivkou

Odvození známého vzorce pro obsah kruhu s pomocí přiblížení pravidelnými mnohoúhelníky a jejich rozkladu na trojúhelníkové dílce využívá souměrnosti (dílce jsou o stejné ploše). Tyto úvahy selhávají v případě plochy jiného tvaru bez předpokladu její souměrnosti a proto je logické pro takové případy hledat nějakého obecnějšího postupu. Myšlenka, jíž zde lze využít, vede právě na pojem integrálu určitého. Uvádí ji Barrow a Newton v XVII st.

Uvažujme nějakou spojitou funkci f jedné reálné proměnné. Její grafem je souvislá křivka. Položme si otázku určení obsahu plochy rovinného útvaru $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{D}$, jenž leží pod touto křivkou nad nějakým omezeným intervalem $[a, b]$ (viz obrázek 6.1).[1] Takový geometrický útvar se občas nazývá křivočarý lichoběžník.

Je-li křivka $\mathscr{B}\mathscr{C}$ lomenou čarou, stačí pro výpočet obsahu plochy $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{D}$ vzorec pro obsah trojúhelníku, protože je taková plocha ve skutečnosti sjednocením konečně mnoha trojúhelníků. Otázkou však je, jak vypočíst obsah plochy s libovolným tvarem hranice $\mathscr{B}\mathscr{C}$, přičemž v tomto případě si navíc uvědomíme, že nemůžeme ani přesně říci, co vlastně hledaným obsahem je — byl totiž definován jen pro trojúhelníky a útvary, jež se z ně skládají. I když je intuitivně jasné, že plocha pod souvislou křivkou obsah pravděpodobně má, k přesnější formulaci se dostaneme později.

V tomto paragrafu tedy *předpokládejme*, že je pojem obsahu plochy rovinného útvaru daného typu korektně definován a má přirozeně očekávané vlastnosti:

(1) obsah prázdného útvaru je roven 0;
(2) pro plochy, tvořené sjednocením trojúhelníků, obdržíme výsledek shodný s obsahem, vypočteným metody elementární geometrie;

[1] Při pohledu na $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{D}$ se přirozeně nabízí představa pozemku, z jedné strany ukončeného hranicí nepravidelného tvaru (potok, skála apod.).

(3) obsah plochy sjednocení dvou disjunktních útvarů je vždy roven součtu obsahů jednotlivých ploch.

Budiž $S(x)$ obsah plochy útvaru $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}'\mathscr{D}'$, jehož pravá mez je na úrovni x (viz obrázek 6.1); definujeme tedy funkci $S : [a, b] \to [0, \infty)$. Obsah plochy pod grafem $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{D}$ v mezích a a b pak udává hodnota $S(b)$. Očividně, $S(a) = 0$.

Zvolme libovolné x mezi a a b. Posuneme-li x o nějaké δ doprava, zvetší se obsah plochy na $S(x + \delta)$.

Dle Weierstrassovy věty funkce spojitá na omezeném uzavřeném intervalu nabývá v nějakých bodech intervalu $[x, x + \delta]$ svých největší a nejmenší hodnoty. Z obrázku je zřejmé, že pro přírůstek obsahu $S(x + \delta) - S(x)$, což je obsah zašrafované plochy, platí

$$\delta m(x, \delta) \leq S(x + \delta) - S(x) \leq \delta M(x, \delta),$$

kde $m(x, \delta)$ a $M(x, \delta)$ značí nejmenší a největší hodnotu f v intervalu $[x, x + \delta]$. Jelikož $\delta > 0$, lze tuto nerovnici napsat ve tvaru

$$m(x, \delta) \leq \frac{S(x + \delta) - S(x)}{\delta} \leq M(x, \delta). \tag{6.1}$$

Budeme-li δ neustále zmenšovat, díky spojitosti funkce f dostaneme $m(x, \delta) \to f(x)$ a $M(x, \delta) \to f(x)$ při $\delta \to 0$ a tudíž vzhledem k nerovnici (6.1) bude

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{S(x + \delta) - S(x)}{\delta} = f(x).$$

Podle definice derivace tento vztah znamená, že $f(x) = S'(x)$, t. j. S je funkcí primitivní k f. Různé primitivní funkce k f se mohou lišit jen o konstantní sčítanec a tudíž, vezmeme-li *jakoukoliv* funkci F, jež je primitivní k f, pak s nějakým C jistě bude

$$S(x) = F(x) + C \tag{6.2}$$

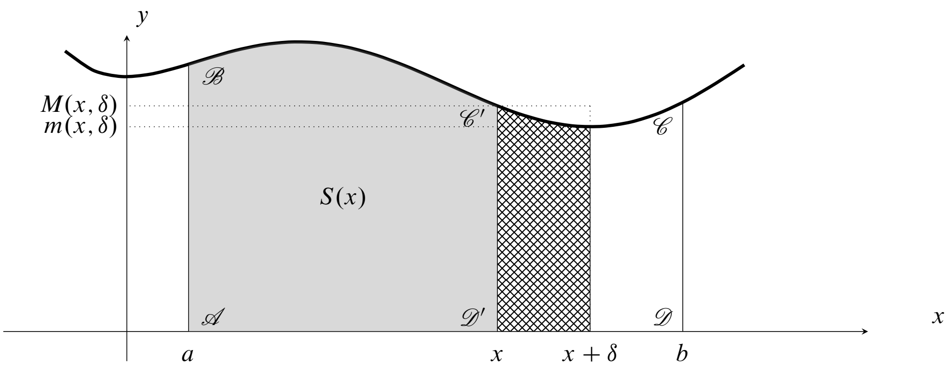
pro všechna x z daného intervalu. Jelikož $S(a) = 0$, musí být $F(a) + C = 0$, t. j. hodnota konstanty C v (6.2) je $C = -F(a)$ a platí

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

pro $a \leq x \leq b$. Mimo jiné, obsah plochy pod grafem f v mezích a a b je

$$S(b) = F(b) - F(a). \tag{6.3}$$

Takto jsme odvodili, že pro určení obsahu plochy křivočarého lichoběžníka v mezích a a b stačí nalézt funkci primitivní k f a vypočíst rozdíl jejich hodnot v bodech b a a. Vztah (6.3) je znám pod názvem Newton-Leibnizův vzorec.



OBRÁZEK 6.1

Z výše uvedeného však stále není jasné, jak matematicky korektně určit, jestli nějaký křivočarý lichoběžník má obsah či nikoliv, a jak pojem jeho obsahu obecně definovat. Dále to upřesníme.

§ 6.2. Plocha pod křivkou a integrál kladné funkce

Myšlenka, vedoucí na způsob výpočtu velikosti plochy pod libovolnou křivkou, spočívá v její přibližném nahrazení jednodušším útvarem s lehce vypočitatelnou plochou, a sice sjednocením malých obdélníků. Touto cestou vzniká *definice* pojmu velikosti plochy figury obecného tvaru a rovněž i možnost posoudit, zda daná plocha obsah má či nikoliv.

Mějme spojitou funkci f, nabývající na $[a, b]$ nezáporných hodnot. Uvažujeme-li „křivočarý lichoběžník", jež ohraničují souvislá křivka o rovnicí $y = f(x)$, vodorovná souřadná osa a svislé přímky s rovnicemi $x = a$, $x = b$, k zavedení pojmu obsahu jeho plochy můžeme přistupovat takto.

Zvolme v intervalu $[a, b]$ libovolné body $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ a zahrneme do ně i koncové body tak, aby bylo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Tyto body rozdělí interval $[a, b]$ na subintervaly; nazvěme tuto konstrukci *rozdělením* intervalu. Nad každým z těchto subintervalů $[x_k, x_{k+1}]$ můžeme sestrojit obdélník o výšce $f(x_k)$ (anebo $f(x_{k+1})$; vezměme např. vždy $f(x_k)$). Sečteme-li obsahy všech těchto obdélníků, dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k), \tag{6.4}$$

což lze považovat za přibližnou hodnotu obsahu křivočarého lichoběžníka (viz obrázek 6.2).

Pro velké hodnoty n jsou všechny veličiny $x_{k+1} - x_k$ malé a tudíž sestrojené obdélníky dostatečně dobře kopírují tvar původní plochy. Proto, budeme-li počet bodů, vložených mezi a a b, zvětšovat, bude chyba přiblížení čim dal tím menší. Potom lze obsah křivočarého lichoběžníka chápat jako limitu součtů (6.4), když se počet bodů v rozdělení intervalu neustále zvětšuje. Výsledná limitní hodnota je *určitým integrálem* funkce f na intervalu $[a, b]$ a se značí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.5}$$

Hodnoty a, b se nazývají dolní a horní meze integrálu. Symbol $\int$, jehož začal užívat Leibniz, pochází z rukopisné podoby písmena S ve slově „Summa", a samotné slovo „integrál" pak zavedl Ioh. Bernoulli (podle lat. „celý"). Myšlenka integrálu se tedy odvíjí od součtů typu (6.4).

Integrál určitý tedy udává obsah plochy křivočarého lichoběžníka a je limitní hodnotou součtů (6.4). Je potřeba však upřesnit detaily, tykající se zmíněného limitního přechodu.

§ 6.3. Integrální součty a definice integrálu

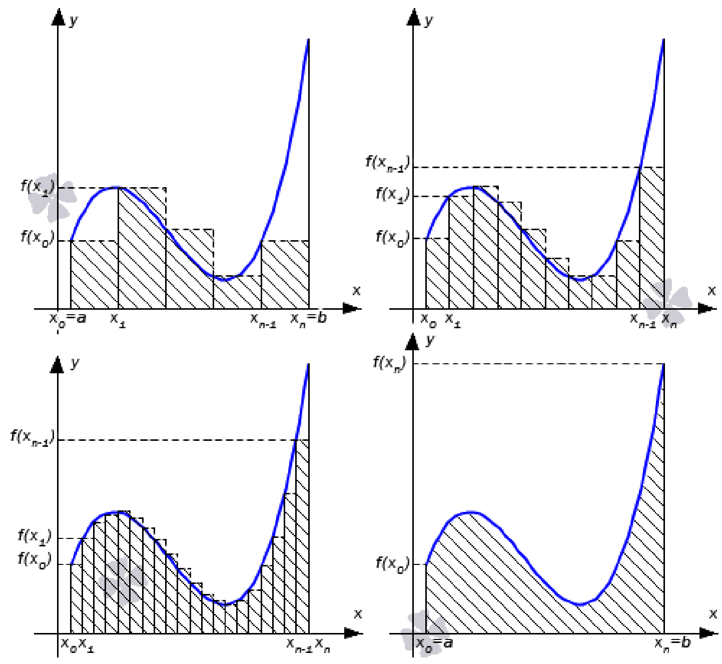
Uvažujme funkci na $[a, b]$ a nějaké libovolné rozdělení tohoto intervalu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{6.6}$$

přičemž zde již vypustíme předpoklad o nezápornosti a spojitosti funkce. Hodnotu největší vzdálenosti mezi sousedními body

$$\lambda = \max_{0 \le k < n} (x_{k+1} - x_k)$$

nazveme *jemností* tohoto rozdělení.



OBRÁZEK 6.2

Vezmeme-li v každém z intervalů $[x_k, x_{k+1}]$ libovolný bod ξ_k, nad každým z těchto intervalů můžeme sestrojit obdélník o šířce $x_{k+1} - x_k$ a výšce $f(\xi_k)$. Součty

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \tag{6.7}$$

jež se nazývají *integrální* (anebo *Riemannovské*) součty, pak lze považovat za přibližné hodnoty obsahu plochy. Limitu těchto součtů při zmenšení jemnosti rozdělení budeme chápat takto.

DEFINICE 6.1. Součty (6.7) mají limitu I při $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} S = I, \tag{6.8}$$

jestliže k libovolně malému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta_\varepsilon > 0$ tak, aby při libovolném rozdělení intervalu o jemností $\lambda < \delta_\varepsilon$ bylo

$$|S - I| < \varepsilon,$$

a to nezávisle na volbě bodů $\xi_0, \xi_1, \ldots$.

Totéž lze vyjádřit jazykem posloupností rozdělení intervalu. Uvažujeme-li posloupnost rozdělení intervalu o jemnostech λ_1, λ_2 atd. takovou, že je $\lim_{m\to+\infty} \lambda_m = 0$, můžeme rovnost (6.8) chápat tak, že pro libovolnou takovou posloupnost rozdělení intervalu konvergují odpovídající hodnoty součtu $S_1, S_2, \ldots$ k I nezávisle na volbě bodů $\xi_0, \xi_1, \ldots$.

Konečné číslo I v (6.8) se nazývá integrálem určitým $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Funkce, pro níž existuje limita (6.8) a tudíž je korektně definován integrál (6.5), se nazývá *integrovatelná* v daném intervalu.

TVRZENÍ 6.2. Funkce integrovatelná na omezeném intervalu musí být na tomto intervalu omezená.

Důkaz. Vezměme libovolné rozdělení intervalu $[a, b]$. Je-li f neomezená na $[a, b]$, pak je neomezená na nějakém subintervalu $[x_k, x_{k+1}]$ zvoleného rozdělení. Toto znamená, že existuje posloupnost bodu $r_1, r_2, \ldots$ taková, že $x_k \leq r_m \leq x_{k+1}$ pro všechna m a $\lim_{m\to+\infty} f(r_m) =$

$+\infty$. Zvolíme-li postupně $\xi_k = r_1$, $\xi_k = r_2$ atd., zjistíme, že konečná limita součtů (6.7) existovat nemůže. $\square$

§ 6.4. Horní a dolní součty

Uvažujme součty

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k), \quad \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k), \tag{6.9}$$

kde M_k, m_k značí největší (resp. nejmenší) hodnotu f na subintervalu $[x_k, x_{k+1}]$. Jelikož předpokládáme spojitost funkce f, nabývá tato funkce svých extremálních hodnot v nějakých bodech subintervalu (v obecném případě bychom definovali M_k, m_k jako její nejmenší horní a největší dolní meze). Součty (6.9) se nazývají *horní* a *dolní* součet (také *součty Darboux*). Je zřejmé, že $\Sigma \geq \sigma$. Porovnáme-li vzorce (6.9) a (6.7), lze dokázat, že Σ, σ jsou nejmenší horní a největší dolní meze všech možných integrálních součtů (6.7), uvažujeme-li libovolné způsoby volby bodů $\xi_0, \xi_1, \ldots$. Platí tedy

$$\sigma \leq S \leq \Sigma.$$

TVRZENÍ 6.3. Přidáme-li k rozdělení intervalu další body, hodnota σ se nezmenší a Σ se nezvetší.

Důkaz. Přidejme mezi x_k a x_{k+1} bod z. Obdržíme nové rozdělení, jemuž odpovídají určité hodnoty součtů σ' a Σ'. Součty Σ a Σ' se liší pouze u členů, odpovídajících subintervalu $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\Sigma = \cdots + M_k(x_{k+1} - x_k) + \ldots, \quad \Sigma' = \cdots + M_k'(z - x_k) + M_k''(x_{k+1} - z) + \ldots,$$

kde M_k', M_k'' značí horní meze f na $[x_k, z]$, $[z, x_{k+1}]$. Je zřejmé, že $M_k' \leq M_k$, $M_k'' \leq M_k$ a tudíž

$$M_k'(z - x_k) + M_k''(x_{k+1} - z) \leq M_k(x_{k+1} - x_k),$$

což dokazuje, že je $\Sigma' \leq \Sigma$. Podobně bude $\sigma' \geq \sigma$. $\square$

TVRZENÍ 6.4. Vždy platí

$$\sigma \leq \Sigma, \tag{6.10}$$

a to i v případech, když se σ, Σ počítají podle různých rozdělení intervalu.

Důkaz. Buďte σ_1, Σ_1 součty, odpovídající libovolně zvolenému rozdělení intervalu. Zvolme nějaké jiné rozdělení a sestrojme příslušné horní a dolní součty σ_2, Σ_2. Sjednotíme-li zvolená dvě rozdělení, obdržíme nové rozdělení, jemuž odpovídají součty σ_3, Σ_3. Pak dle tvrzení 6.3 $\Sigma_3 \leq \Sigma_1$, $\sigma_3 \geq \sigma_1$ a rovněž $\Sigma_3 \leq \Sigma_2$, $\sigma_3 \geq \sigma_2$. Jelikož $\sigma_3 \leq \Sigma_3$, dostaneme

$$\sigma_1 \leq \sigma_3 \leq \Sigma_3 \leq \Sigma_2$$

a tudíž $\sigma_1 \leq \Sigma_2$. $\square$

VĚTA 6.5. Funkce f je integrovatelná na $[a, b]$ právě tehdy, když

$$\lim_{\lambda \to 0} (\Sigma - \sigma) = 0.$$

VĚTA 6.6. Funkce spojitá na omezeném intervalu je na něm integrovatelná.