PŘEDNÁŠKA 7

Integrál určitý II

Integrál určitý nezáporné funkce udává obsah plochy křivočarého lichoběžníka, ohraničeného grafem této funkce, vodorovnou osou a mezními hodnotami argumentu. Definice integrálu jako limity integrálních součtů umožňuje rozšířit tento pojem na funkce libovolného znaménka.

Dále lze definici rozšířit tak, aby bylo možné uvažovat $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a \le b$; pak podle definice

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.1}$$

Ve speciálním případě, když $a = b$, podle definice je

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{7.2}$$

TVRZENÍ 7.1 (nutná podmínka existence integrálu). Aby existoval integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, musí být funkce f na intervalu $[a,b]$ omezená.

Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje ne pro každou omezenou funkci f; existují tedy omezené, avšak neintegrovatelné funkce. Nejdůležitější třídu integrovatelných funkcí tvoří funkce spojité.

VĚTA 7.2. Pro funkci f, jež je spojitá (anebo alespoň po částech spojitá) na omezeném intervalu $[a,b]$, existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Výraz „po částech spojitá“ znamená, že je funkce spojitá všude na daném intervalu, vyjma konečně mnoha bodů. Všude dále se zabýváme zejména případem spojité funkce.

§ 7.1. Vlastnosti integrálu určitého

TVRZENÍ 7.3. Je-li $f(x) = c$ konstantní na $[a,b]$, platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c\,(b-a)\,.$$

Důkaz. Stačí uvažovat integrální součet pro libovolné rozdělení $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$: $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = c\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = c(x_n - x_0) = c(b-a)$. $\square$

Platí tedy $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

TVRZENÍ 7.4. Existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak existuje i $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha \ge a$, $\beta \le b$.

Tedy funkci integrovatelnou na $[a,b]$ lze integrovat i na všech subintervalech $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

TVRZENÍ 7.5. Existují-li $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$, pak existují také $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x$. V případě, když $f_2 \ne 0$ a je $\frac{1}{f_2}$ omezená, existuje i $\int_a^b \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,\mathrm{d}x$.

TVRZENÍ 7.6 (linearita). Existují-li $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$, pro libovolné konstanty λ_1, λ_2 platí

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.3}$$

Mimo jiné, konstantní činitel lze vždy vytknout před znak integrálu. Relace (7.3) vyjadřuje stejnou vlastnost linearity, jíž má integrál neurčitý.

TVRZENÍ 7.7 (aditivita). Je-li c libovolný bod ležící mezi a a b a existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.4}$$

Úmluvy (7.1), (7.2) umožňují v (7.4) uvažovat hodnoty a, b, c, umístěné na ose libovolným způsobem (t. j. např. $b < c < a$), přičemž rovnost (7.4) bude zachována.

Tato vlastnost se nazývá aditivita podle intervalu, neboť (7.4) znamená, že integrál funkce na sjednocení navzájem disjunktních intervalů je součtem integrálů též funkce na jednotlivých intervalech. Je to vlastnost velmi přirozená vzhledem k tomu, že určitý integrál kladné funkce má význam velikosti plochy geometrického útvaru.

Všude dále budiž $a < b$.

TVRZENÍ 7.8 (monotonie). Existují-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a je-li $f(x) \geq g(x)$ pro $a \leq x \leq b$, platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mimo jiné, je-li f nezáporná na $[a, b]$ a existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

TVRZENÍ 7.9. Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje právě když existuje $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, přičemž platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

TVRZENÍ 7.10. Existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a je-li $m \leq f(x) \leq M$ při všechna $a \leq x \leq b$, platí

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a). \tag{7.5}$$

Pro kladnou funkci f má nerovnost (7.5) očividný geometrický význam: obsah plochy pod křivkou lze odhadnout shora a zdola obsahy příslušných obdélníků, odpovídajících největší a nejmenší hodnotám funkce v daném intervalu.

TVRZENÍ 7.11. Je-li f spojitá na $[a, b]$, existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle Weierstrassovy věty spojitá funkce f nabývá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ svých nejmenší a největší hodnot m, M. Vzhledem k tvrzení 7.10 bude

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.$$

Avšak f jakožto funkce spojitá nabývá všech hodnot mezi m a M a tudíž, mimo jiné, i hodnoty $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, t. j. existuje požadované ξ. □

Výraz $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se nazývá *integrální střední hodnota* funkce f na $[a,b]$ a poskytuje přirozené zobecněni pojmu aritmetického průměru diskrétních veličin.

§ 7.2. Newton–Leibnizův vzorec

Pro výpočet integrálu určitého stačí umět nalézt k dané funkci příslušnou funkci *primitivní* (t. j. vypočítat odpovídající integrál neurčitý). Platí totiž *Newton–Leibnizův vzorec.*[1]

VĚTA 7.12 (Newton–Leibnizův vzorec). Budiž f funkce po částech spojitá na $[a,b]$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{7.6}$$

kde je F funkce primitivní k f na daném intervalu.

Důkaz. Je-li f po částech spojitá, lze (a,b) vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha disjunktních intervalů, z nichž v každém je f spojitá. Jelikož integrál podle sjednocení intervalů bude součtem integrálů na jednotlivých intervalech tohoto sjednocení, stačí uvažovat případ, když je f spojitá na (a,b). Položíme-li pro každé x z daného intervalu

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7.7}$$

obdržíme jistou funkci F. Pak se dokáže, že je F funkcí primitivní k f. Podle vlastnosti linearity integrálu (§ 7.1) bude

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dále úpravou obdržíme[2]

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t + f(x).\end{aligned} \tag{7.8}$$

Vzhledem k spojitosti f lze očekávat, že první sčítanec vpravo bude při $h \to 0$ nekonečně malým. Vskutku, díky spojitosti f v bodě x k libovolně malému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta_\varepsilon > 0$ tak, aby bylo $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, je-li $|t-x| < \delta_\varepsilon$. Proto při t dostatečně blízkých k x (t. j. splňujících $|t-x| < \delta_\varepsilon$) bude

$$\frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon,$$

což vzhledem k libovolnosti ε znamená, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t = 0.$$

---

[1] Vzorec (7.6) může sloužit i jako definice integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ spojité funkce f.

[2] Zde si znovu využijeme linearity a vytkneme před znak integrálu konstantní člen $f(x)$, jenž je na integrační proměnné t zcela nezávislý:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}f(x)\int_x^{x+h} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}f(x)\int_x^{x+h} 1\,\mathrm{d}t = f(x),$$

jelikož $\int_x^{x+h} 1\,\mathrm{d}t = h$.

Využijeme-li tohoto v (7.8), podle definice derivace dostaneme

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x),$$

pročež je F skutečně funkcí primitivní k f. Teď si stačí jen uvědomit, že podle definice funkce F pomocí (7.7) je $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a $F(a) = 0$, což vede na (7.6). Bude-li místo F použita jiná primitivní funkce, vztah (7.6) bude pořad zachován, neboť se dvě různé primitivní funkce liší pouze aditivní konstantou. □

§ 7.3. Výpočet integrálu určitého

Vzhledem k Newton–Leibnizovu vzorci (věta 7.12) i pro integrál určitý základními nástroji jsou stále metoda substituce a metoda *per partes*, jež je třeba v tomto případě poněkud uzpůsobit.

§ 7.3.1. Metoda integrace po částech

Metoda integrace po částech pro integrál určitý se formuluje téměř stejným způsobem jako v případě integrálu neurčitého.

Mějme dvě funkce u a v, jež mají v daném intervalu spojité derivace. Pak $(uv)' = uv' + u'v$, odkud $uv' = (uv)' - vu'$ a proto

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.9}$$

Funkcí primitivní k derivaci součinu $(uv)'$ je, samozřejmě, součin uv. Vzhledem k Newton–Leibnizovu vzorci (7.6) pro libovolnou funkci g se spojitou derivaci platí

$$\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = g(b) - g(a) \tag{7.10}$$

nebo, což je totéž,

$$\int_a^b \mathrm{d}g(x) = g(b) - g(a). \tag{7.11}$$

Proto

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) \tag{7.12}$$

a z (7.9) obdržíme

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.13}$$

Integrace *per partes* pro určitý integrál spočívá v užití vzorce (7.13), jenž se často zapisuje ve zkráceném tvaru

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.14}$$

Případy vhodného využití této metody pro integrál určitý jsou tytéž jako v případě integrálu neurčitého. Integrace po částech je vhodné využit, jestliže ve výsledku bude integrál $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ jednodušší než $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (t. j. zderivování u při současném zintegrování v' zpět na v situaci zlepšuje).

Vzpomeneme-li si teď na pojem diferenciálu funkce, pro lepší zapamatování můžeme rovnost (7.14) zapisovat ve tvaru

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x). \tag{7.15}$$

PŘÍKLAD 7.13. Vypočtěme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

Řešení. Jelikož $(\cos x)' = -\sin x$, pak $\sin x = v'(x)$ pro $v(x) = -\cos x$. Vezmeme-li dále $u(x) = x$, platí $u'(x) = 1$ a podle vzorce (7.14) obdržíme

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= -\int_0^{\pi} x \, (\cos x)' \, dx = [x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= \pi \cos \pi - 0 \cos 0 + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = -\pi + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= -\pi + \int_0^{\pi} (\sin x)' \, dx = -\pi + [\sin x]_0^{\pi} = -\pi + \sin \pi - \sin 0 = -\pi.\end{aligned}$$

V posledních řádcích jsme použili základní vlastnost integrálu (7.10).

§ 7.3.2. Metoda substituce

Substituční metoda je založená na vzorci[3]

$$\int_a^b f(\phi(x)) \, d\phi(x) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)),$$

kde F je primitivní funkce pro f, t. j.

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

Výpočet se provádí substitucí $t = \phi(x)$, odkud $dt = \phi'(x) \, dx$ a pokud má integrand tvar $f(\phi(x))\phi'(x)$, pak lze x z výrazu úplně vyloučit a obdržíme integrál vzhledem k nové proměnné t. Tím pádem stačí odvodit neurčity integrál z f a dosadit odpovídající (ztransformované) meze. *Tento poslední krok, jenž nemá obdobu pro integrál neurčity, je velmi důležitý, jelikož nesprávné meze integrace způsobí chybu.*

VĚTA 7.14. Má-li funkce ϕ na (a, b) spojitou derivaci, pro každou spojitou funkci f platí

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) \, dt. \tag{7.16}$$

Vztah (7.16) znamená, že v případě integrálu $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx$ se jedná, vlastně, o integrál $\int f(t) \, dt$ v mezích $\phi(a)$ a $\phi(b)$. Novou proměnnou t tedy zavadíme vztahem $t = \phi(x)$.

Metodu substituce občas používáme v alternativní podobě, a sice tak, že se vzorec (7.16) přečte „v opačném směru“.

VĚTA 7.15. Nechť $[\alpha, \beta]$ a $[a, b]$ jsou uzavřené intervaly a funkce $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je taková, že $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$. Má-li funkce ψ na $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci, pak pro každou spojitou funkci f platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(s))\psi'(s) \, ds. \tag{7.17}$$

Máme-li vypočíst $\int_a^b f(x) \, dx$, rovnice (7.17) nám umožňuje tento integrál upravit na jiný tvar $\int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(s))\psi'(s) \, ds$; zavadíme tedy novou proměnnou s vztahem $\psi(s) = x$. Vhodnost volby substituce $\psi(s) = x$ se snažíme posoudit podle tvaru diferenciálu $d\psi(s) = \psi'(s) \, ds$.

[3]Tento vztah je přímým důsledkem metody substituce pro neurčitý integrál a Newton–Leibnizova vzorce (7.6). Metoda substituce pro neurčitý integrál je důsledkem pravidla derivovaní složené funkce.

Poznámka 7.16. Vzorce metody substituční znamenají rovnost hodnot integrálů určitých, což jsou čísla. Po převedení integrálu na jiný tvar s pomocí substituce tedy *není potřeba se vracet k původní proměnné.*

V praxi výpočty provádíme nejčastěji tak, ze vzorec explicitně nezapisujeme a pokračujeme přímo k zaměně proměnné. Přitom vykonáme následující kroky:

(1) vyšetříme výraz pod integrálem a zkusíme nalézt vhodnou substituci;
(2) zavedeme novou proměnnou, dosadíme do integrandu a původní proměnnou z integrandu a diferenciálu zcela vyloučíme;
(3) vypočítáme nové integrační meze.

PŘÍKLAD 7.17. Mějme integrál

$$\int_{-1}^{3} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}}.$$

Řešení 7.17.1. Integrand obsahuje dva lineární členy: x a $x+2$, oba dva mají stejný diferenciál.[4] Proto zaveďme substituci $x+2=t$. Pak $x=t-2$ a $\mathrm{d}t=\mathrm{d}(x+2)=\mathrm{d}x$. Jelikož se proměnná x mění v mezích od -1 k 3, potom $t=x+2$ se mění od $-1+2=1$ k $3+2=5$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}} &= \int_{1}^{5} \frac{(t-2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_{1}^{5} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - 2\int_{1}^{5} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\ &= \int_{1}^{5} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t - 2\int_{1}^{5} t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{1}^{5} - 2\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{1}^{5} \\ &= \frac{5^{\frac{3}{2}}-1}{\frac{3}{2}} - 2\frac{5^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\sqrt{5})^3 - 4\sqrt{5} + \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Řešení 7.17.2. Jinak bychom mohli také zavést substituci $\sqrt{x+2}=s$. Pak $x=s^2-2$ a proto $\mathrm{d}x=2s\,\mathrm{d}s$.[5] Dále jelikož $-1\le x\le 3$, pak $1\le x+2\le 5$ a vzhledem k monotonnosti funkce $x\mapsto\sqrt{x+2}$ platí $1\le\sqrt{x+2}\le\sqrt{5}$. Dosazením do integrálu obdržíme, samozřejmě, stejný výsledek:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}} &= \int_{1}^{\sqrt{5}} \frac{(s^2-2)\cdot 2s\,\mathrm{d}s}{s} = 2\int_{1}^{\sqrt{5}} (s^2-2)\,\mathrm{d}s \\ &= 2\int_{1}^{\sqrt{5}} s^2\,\mathrm{d}s - 4\int_{1}^{\sqrt{5}} \mathrm{d}s = 2\left[\frac{s^3}{3}\right]_{1}^{\sqrt{5}} - 4(\sqrt{5}-1) = \frac{2}{3}(\sqrt{5})^3 - 4\sqrt{5} + \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.18 (substituce a integrace *per partes*). Vypočtěme

$$\int_{0}^{2} x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Můžeme si všimnout, že platí $\mathrm{d}(x^3)=3x^2\,\mathrm{d}x$ a proto je přirozené zavést substituci

$$t=x^3. \tag{7.19}$$

[4] Zde využijeme pojmu diferenciálu funkce jedné proměnné. *Diferenciálem* funkce f v bodě x se nazývá výraz

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.18}$$

kde „$f'(x)\,\mathrm{d}x$“ tlumočíme jako „$f'(x)\cdot\mathrm{d}x$“. Připomíná to také označení pro derivaci ve tvaru $f'(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, odkud obdržíme (7.18) formálním vynásobením výrazem $\mathrm{d}x$ (jemuž se říká diferenciál nezávisle proměnné). S diferenciály se pracuje stejné jako s odpovídajícími derivacemi.

[5] Mohli bychom také odvodit $\mathrm{d}s=\mathrm{d}(\sqrt{x+2})=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$, pak $\mathrm{d}x=2\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}s=2s\,\mathrm{d}s$.

Potom máme $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$ a tudíž $x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$. Dále, jelikož se x mění v mezích od 0 k 2: $0 \le x \le 2$, pak t podle (7.19) je v mezích 0 až $2^3 = 8$: $0 \le t \le 8$. Dosaďme toto do integrálu:

$$\int_0^2 x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^3 e^{x^3} \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^3 e^{x^3} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}\int_0^8 t e^t\,\mathrm{d}t \tag{7.20}$$

a pro výpočet $\int_0^8 t e^t\,\mathrm{d}t$ použijme metodu *per partes*:

$$\int_0^8 t e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^8 t(e^t)'\,\mathrm{d}t = (te^t)\big|_0^8 - \int_0^8 1 \cdot e^t\,\mathrm{d}t = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^8 e^t\,\mathrm{d}t = 2e^2 - \left[e^t\right]_0^8$$
$$= 2e^2 - (e^8 - e^0) = 2e^2 - e^8 + 1.$$

Dosazením tohoto výrazu do (7.20) obdržíme

$$\int_0^2 x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2e^2 - e^8 + 1}{3}.$$

PŘÍKLAD 7.19. Vypočtěme

$$\int_{-1}^2 x(2-x^2)^7\,\mathrm{d}x.$$

Řešení 7.19.1. Ihned na první pohled je zřejmé, že se jedná o integrál polynomu, pro jehož výpočet stačí výraz v integrandu algebraicky upravit a následně integrovat podle vzoru mocninné funkce. Mnohem jednodušší je ale vykonat vhodnou substituci (řešení 7.19.2), jelikož v tomto případě nemusíme zdlouhavě upravovat polynom stupně 15. □

Řešení 7.19.2. Můžeme si všimnout, že se ten nejsložitější výraz $(2-x^2)^7$ zjednoduší, jestli zavedeme novou proměnnou $t = 2 - x^2$. Pak bude $(2-x^2)^7 = t^7$ a $\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x$. Navíc dále vypočítávat $\mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2x}$, $x^2 = 2 - t$) není potřeba vzhledem k přítomnosti členu „x“, jenž můžeme k diferenciálu přiřadit, a tak stačí mít vztah $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Vypočtěme nové meze integrovaní: $x = -1 \Rightarrow t = 2 - x^2 = 1$, $x = 2 \Rightarrow t = 2 - x^2 = 2 - 4 = -2$.[6] Pak obdržíme

$$\int_{-1}^2 x(2-x^2)^7\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 (2-x^2)^7 \cdot x\,\mathrm{d}x = \int_1^{-2} t^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{2}\int_1^{-2} t^7\,\mathrm{d}t$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\frac{t^8}{8}\right]_1^{-2} = -\frac{1}{16}((-2)^8 - 1) = -\frac{255}{16}.$$

[6] Poznamenejme, že nové meze integrovaní 1 a -2 vychází opačně uspořádané: dolní mez je vetší než ta horní, $1 > -2$. Není to chyba; důvodem je skutečnost, že na intervalu $(-1, 2)$ není funkce $x \mapsto 2 - x^2$ rostoucí.