PŘEDNÁŠKA 8

Nekonečné číselné řady

§ 8.1. Motivační úvahy

Začněme dvěma známými příklady, u nichž se setkáme se součty o nekonečnem počtu sčítanců.

PŘÍKLAD 8.1. Zenonova aporie o Achillovi a želvě, z nichž první běží 10-krát rychleji a na začátku je o 100 metrů pozadu, vede na nekonečný součet

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots . \tag{8.1}$$

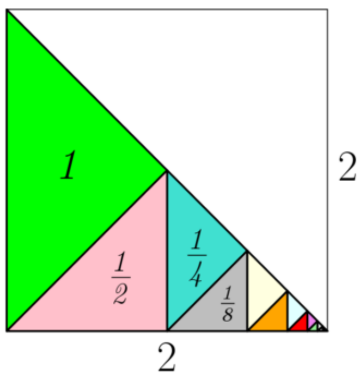
Paradox tedy — jenž paradoxem být přestane, dokážeme-li, že hodnota součtu je konečná — spočívá v tom, že Achilles želvu pravděpodobně nikdy nedohoní, neboť suma v (8.1) obsahuje nekonečně mnoho kladných sčítanců.

PŘÍKLAD 8.2. Součet obsahů barevných trojúhelníků na obrázku 8.1 by měl být roven

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = 2 \tag{8.2}$$

jakožto polovina obsahu čtverce o straně s délkou 2.

Vzorce (8.1), (8.2) představují aritmetické součty s nekonečným počtem členů, přičemž význam rovnice (8.2) je zřejmý z obrázku 8.1. Není však zcela jasné, v jakém přesně smyslu bychom měli takové součty chápat a do jaké míry lze na ně rozšířit obvyklé techniky práce se součty konečnými.



OBRÁZEK 8.1

Sčítance v (8.1), (8.2) mají tvar členů geometrické posloupnosti a jejich součet se nazývá řadou geometrickou.

DEFINICE 8.3. Geometrickou řadou se nazývá nekonečný součet tvaru

$$a_0 + qa_0 + q^2a_0 + \dots, \tag{8.3}$$

kde q je kvocientem řady.

Pro řadu geometrickou (8.3), položíme-li $s_n = a_0 + qa_0 + \dots + q^{n-1}a_0$, při $q \neq 1$ platí známý vzorec

$$s_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{8.4}$$

Je pak přirozené nekonečný součet (8.3) chápat jako limitní hodnotu čísel s_n při n rostoucím nad všechny meze. Jelikož při $|q| < 1$ je $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$, z (8.4) je zřejmé, že $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{a_0}{1-q}$. Mimo jiné, při $a_0 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ bude $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, což odpovídá vztahu (8.2) z příkladu 8.2.

Pole uvedených úvah lze zavést obecnou definici pojmu součtu nekonečné posloupnosti čísel, nezávislou na jejím konkretním tvaru.

§ 8.2. Pojem číselné řady a základní tvrzení

Budiž $a_1, a_2, \dots$ nekonečná posloupnost čísel.

DEFINICE 8.4. Formální součet nekonečně mnoha čísel

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{8.5}$$

se nazývá nekonečnou číselnou řadou. Hodnota a_n je obecným členem řady. Výrazy

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \tag{8.6}$$

kde $n = 1, 2, \dots$, se nazývají částečné součty řady (8.5).

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, říkáme, že tato řada konverguje a jejím součtem je číslo s. Je-li limita $\lim_{n\to+\infty} s_n$ nevlastní, říkáme, že řada diverguje. Nakonec v případě, když $\lim_{n\to+\infty} s_n$ neexistuje, se říká, že řada součet nemá (anebo osciluje).

Nejjednodušším příkladem, v němž lze uvedené pojmy zcela snadno popsat, je řada geometrická.

PŘÍKLAD 8.5. Geometrická řada $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ konverguje jen tehdy, když $|q| < 1$.

Vysvětlení. Při $|q| < 1$ je $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ a tudíž dle vzorce (8.4) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Při $q > 1$ je $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ a proto $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$. Při $q = 1$ je taktéž $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$. Nakonec, je-li $q < -1$, limita $\lim_{n\to+\infty} q^n$ neexistuje[1] a tudíž $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ součet nemá. Podobně při $q = -1$. $\square$

Tedy např. řady (8.1), (8.2) konvergují, řada $1 + 1 + 1 + \dots$ diverguje, řada $1 - 1 + 1 - \dots$ součet nemá. Poznamenejme, že analýza konvergence řady geometrické jakožto řady nejjednodušší, v podstatě, spočívá ve výpočtu jejího součtu; v jiných případech je to možné zcela výjimečně a tudíž vyšetřování konvergence obecně vyžaduje určité speciální techniky.

PŘÍKLAD 8.6. Řada $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje.

[1] Stačí si všimnou, jak se chovají sudé a liché mocniny: při $|q| > 1$, $q < 0$ je $q^{2m} = |q|^{2m} \to +\infty$, $q^{2m+1} = -|q|^{2m+1} \to -\infty$ pro $m \to +\infty$.

Vysvětlení. Jelikož $x \mapsto \sqrt{x}$ je funkce rostoucí, pro částečné součty $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ platí

$$s_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

a tudíž hodnota s_n roste nad všechny meze při $n \to +\infty$. Řada tedy diverguje. □

DEFINICE 8.7. Řada $a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$ se nazývá *zbytkem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po jejím N-m členu.

VĚTA 8.8. Pro libovolnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

(1) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ s nějakým $N > 1$;

(2) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N$. □

Poznámka 8.9. Z výše uvedeného je zřejmé, že odebrání nebo přidání k začátku řady konečně mnoha členů její konvergenci nikterak neovlivní.

Lze očekávat, že v případě konvergence řady by se měli její členy neustále zmenšovat, neboť jinak bychom k součtu přičítali .

VĚTA 8.10 (nutná podmínka konvergence). Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak nutně musí být

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{8.7}$$

Důkaz. Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Pak dle definice 8.4 pro posloupnost částečných součtů bude $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, kde $-\infty < s < \infty$. Je zřejmé, že rovněž $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Avšak $s_n - s_{n-1} = a_n$ a tudíž musí platit (8.7). □

Podmínka (8.7) je pouze nutná, nikoliv však postačující pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (je splněna např. u divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; viz příklad 8.6).

VĚTA 8.11. Konvergují-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$, kde α, β jsou libovolné konstanty.

Poslední tvrzení plyne bezprostředně z definice 8.4.

§ 8.3. Číselné řady s kladnými členy

Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ budeme nazývat řadou s kladnými členy, jsou-li všecky $a_1, a_2, \ldots$ kladná čísla.[2]

VĚTA 8.12. Řada s kladnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vždy má součet, přičemž její součet je konečný právě když je odpovídající posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, \ldots$ shora omezená.

Důkaz. Je-li vždy $a_n \geq 0$, bude posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, \ldots$ neklesající. Tvrzení pak plyne z věty o existenci limity monotonní posloupnosti čísel. □

O konvergenci řady geometrické, jak jsme viděli, lze rozhodnou velice snadno. Nyní uveďme dva příklady jednoduchých řad, jejichž konvergence či divergence již zřejmá není (dále k vyšetření těchto řad získáme pohodlnější prostředky).

PŘÍKLAD 8.13. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje.

---

[2]Pro pohodlí budeme občas užívat tohoto názvu i obecněji, když jsou pouze nezáporná.

Vysvětlení. Rozkladem lomeného výrazu $\frac{1}{n(n+1)}$ na částečné zlomky je $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ a tudíž pro částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ platí

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Pak dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$, tedy řada konverguje k hodnotě 1. □

DEFINICE 8.14. Harmonickou řadou se nazývá řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots . \tag{8.8}$$

TVRZENÍ 8.15. Harmonická řada (8.8) diverguje.

Důkaz. Zapišme nekonečný součet (8.8) ve tvaru

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots,$$

kde posledním sčítancem v závorkách je vždy $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$ atd. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = c_0 + c_1 + c_2 + \dots,$$

kde $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2}$ a obecně výraz v závorkách s posledním sčítancem $\frac{1}{2^k}$ je

$$c_k = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}.$$

V každém c_k nejmenším sčítancem je právě ten poslední $\frac{1}{2^k}$ a celkem je sčítanců 2^{k-1}. Proto $c_2 \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $c_3 \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ a obecně $c_k \geq 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$. Tudíž není posloupnost částečných součtů $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ shora omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tedy diverguje podle věty 8.12. □

§ 8.3.1. Srovnávací věty

Buďte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s kladnými členy.

VĚTA 8.16 (I. srovnávací věta). Je-li $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_0$, začínaje nějakým n_0, pak z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a z divergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ve větě 8.16 se řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazývá majorantou pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je pak minorantou pro $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B < +\infty$, vzhledem ke kladnosti členů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ posloupnost jejich částečných součtů $\mathcal{A}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$, je monotonně rostoucí a omezena shora číslem B. Pak podle věty o limitě monotonní posloupnosti existuje $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$. Na druhou stranu, je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, pak z nerovnice $\sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$, plyne, že i $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rovněž diverguje. □

PŘÍKLAD 8.17. Platí následující:

(1) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.
(2) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverguje.

Důkaz. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje (viz příklad 8.13) a tudíž dle věty 8.16 konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, neboť pro všechna $n > 1$ je

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{nn} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ minorantou je divergentní řada harmonická, neboť pro všechna n je $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{nn}} = \frac{1}{n}$. Pak podle věty 8.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverguje. □ □

VĚTA 8.18 (II. srovnávací věta). Existuje-li limita

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, \tag{8.9}$$

pak:

(1) při $\lambda < +\infty$ z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
(2) při $\lambda > 0$ z divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

Je-li v (8.9) $0 < \lambda < +\infty$, pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergují nebo divergují zároveň.

V (1) je tedy možný případ $\lambda = 0$ a v (2) pak $\lambda = +\infty$.

Důkaz. Buď λ v (8.9) konečné kladné číslo. Zvolme libovolně malé číslo $\varepsilon > 0$. Dle definice limity se najde n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon$, t. j. $a_n < (\lambda + \varepsilon)\, b_n$. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, dle věty 8.11 konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + \varepsilon)\, b_n$. Pak dle srovnávací věty 8.16 konverguje rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

V případě, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje a $\lambda > 0$, platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$$

a tudíž musí divergovat i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (jinak podle hořejšího musí konvergovat $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$). □

Poznámka 8.19 (o tom, že je kladnost členů podstatná). Při $\lambda = 1$ vztah (8.9) znamená asymptotickou ekvivalenci těchto dvou posloupností: $a_n \sim b_n$ při $n \to +\infty$. Je proto přirozené očekávat, že řady, jejichž členy se v $+\infty$ chovají stejně, mají rovněž stejné vlastnosti konvergence. Tuto skutečnost právě vyjadřuje uvedená věta. Poznamenejme však, že je tvrzení věty 8.18 dokázáno pro řady s kladnými členy a v případě řady s členy proměnného znaménka, obecně řečeno, neplatí.

S pomocí srovnávací věty 8.18 lze snadno odvodit, mimo jiné, výsledky příkladu 8.17, jelikož $\frac{1}{n^2} : \frac{1}{n(n+1)} \to 1$, $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} : \frac{1}{n} \to 1$ při $n \to +\infty$. Tato věta je velmi vhodná i v jiných podobných případech, a to zejména když bezprostřední využití I. srovnávací věty 8.16 je méně pohodlné.

PŘÍKLAD 8.20. Platí následující:

(1) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[5]{n+1} + \sqrt[4]{n^3}}$ diverguje.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ konverguje.

Vysvětlení. Stačí využit srovnávací věty 8.18.

1. Pro řadu (1) položme $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[5]{n+1} + \sqrt[4]{n^3}}$, $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$. Takováto volba b_n v (8.9) je zřejmá, jelikož se jmenovatel v a_n skládá jen z mocninných výrazů a $\frac{3}{4}$ je nejvyšší z mocnin; tedy v (8.9) ihned očekáváme $\lambda = 1$. Vskutku,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{3}{4}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-\frac{1}{4}} + (n+1)^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{3}{4}} + 1} = 1,$$

neboť

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{3}{4}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{1}{5}}}\frac{n^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{3}{4}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{1}{5}}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{11}{20}}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{11}{20}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{11}{20}}}=0$$

jakožto limita součinu dvou veličin majících konečné limity. Podle věty 8.18 řada konverguje.

2. Jelikož je známo, že $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$, mimo jiné, bude $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right):\frac{1}{n^2}=1$. Vezmeme-li tedy $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $b_n=\frac{1}{n^2}$, bude limita (8.9) rovna 1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje (příklad 8.17) a tudíž podle věty 8.18 konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

VĚTA 8.21 (III. srovnávací věta). Připusťme, že při nějakém n_0 pro všechna $n\ge n_0$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{8.10}$$

Pak z konvergence $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ plyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a z divergence $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ plyne divergence $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Důkaz. Hodnoty konečných součtů $\sum_{n=1}^{n_0}a_n$, $\sum_{n=1}^{n_0}b_n$ nemají vliv na konvergenci odpovídajících řad a tudíž lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že (8.10) platí již začínaje $n_0=1$. Pak při libovolném n bude $\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2}$, …, $\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}$, přičemž na obou stranách nerovnic jsou kladná čísla. Vynásobíme-li je navzájem, dostaneme platnou nerovnici

$$\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1}\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_n}{b_1}$$

a tudíž lze aplikovat větu 8.16. □

PŘÍKLAD 8.22. Platí následující:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ diverguje: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$, věta 8.16 a příklad 8.6;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$ konverguje: $\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}:\frac{1}{2^n}=\sqrt[n]{n}$, přičemž $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; věta 8.18.

§ 8.3.2. Základní kriteria konvergence

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ řada s kladnými členy.

VĚTA 8.23 (odmocninové kriterium (Cauchy)). Existuje-li limita

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda, \tag{8.11}$$

pak:

(1) při $\lambda<1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje;
(2) při $\lambda>1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje.

Důkaz. Buď λ hodnota limity v (8.11), přičemž $\lambda<1$. Pak se najde nějaké $\varepsilon>0$ tak, aby bylo $\lambda+\varepsilon<1$. Dle definice limity posloupnosti pro dostatečně velká $n\ge n_0$ bude

$$\lambda-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<\lambda+\varepsilon \tag{8.12}$$

a tudíž $a_n<(\lambda+\varepsilon)^n$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje dle srovnávací věty 8.16, neboť konverguje geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda+\varepsilon)^n$.

Je-li $\lambda>1$, vzhledem k (8.12) pro $n\ge n_0$ bude

$$a_n>(\lambda-\varepsilon)^n, \tag{8.13}$$

přičemž $\lambda - \varepsilon > 1$, je-li ε dostatečně malé. Pak lze opět využít srovnávací věty 8.16 anebo poznamenat, že vzhledem k (8.13) není splněna nutná podmínka konvergence (věta 8.10). $\square$

VĚTA 8.24 (podílové kriterium (d'Alembert)). Existuje-li limita

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \tag{8.14}$$

pak:

(1) při $\lambda < 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(2) při $\lambda > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Stačí uvažovat podobně důkazu věty 8.23: platí-li (8.14) s $0 \le \lambda < 1$, dle definice limity posloupnosti při dostatečně malém $\varepsilon > 0$ bude $\lambda + \varepsilon < 1$, přičemž, začínaje nějakým N_ε, pro všechna $n \ge N_\varepsilon$ bude

$$\lambda - \varepsilon \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \lambda + \varepsilon. \tag{8.15}$$

Jelikož $a_n > 0$, z (8.15) plyne, že

$$a_{n+1} \le (\lambda + \varepsilon)\, a_n \le (\lambda + \varepsilon)^2\, a_{n-1} \le \cdots \le (\lambda + \varepsilon)^n\, a_1$$

a tudíž lze s pomocí věty 8.16 řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ srovnat s konvergentní řadou geometrickou $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + \varepsilon)^n$. Je-li $\lambda > 1$, v (8.15) vezmeme ε tak, aby bylo stále $\lambda - \varepsilon > 1$ a využijeme tentokrát levé části nerovnice:

$$a_{n+1} \ge (\lambda - \varepsilon)\, a_n \ge (\lambda - \varepsilon)^2\, a_{n-1} \ge \cdots \ge (\lambda - \varepsilon)^n\, a_1.$$

Z tohoto odhadu je zřejmé, že a_n nemůže konvergovat k 0 při $n \to +\infty$, nutná podmínka konvergence tedy splněna není a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pak diverguje dle věty 8.10. $\square$

U důkazů vět 8.23, 8.24 si můžeme všimnout, že lze odmocninové a podílové kriteria formulovat v poněkud obecnější podobě.

VĚTA 8.25 (odmocninové kriterium). Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Existují-li $\lambda < 1$ a n_0 takové, že

$$\sqrt[n]{a_n} \le \lambda \tag{8.16}$$

pro všechna $n \ge n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Je-li $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ pro všechna dostatečně velká n, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

VĚTA 8.26 (podílové kriterium). Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Existují-li $\lambda < 1$ a n_0 takové, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \lambda \tag{8.17}$$

pro všechna $n \ge n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ pro všechna dostatečně velká n, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Tyto věty jsou obecnější než formulované výše věty 8.23, 8.24, neboť odhady (8.16), (8.17) mohou platit i v případech, když limity (8.11), (8.14) neexistují.

Poznámka 8.27 (o nerozhodném případě Cauchyho a d'Alembertova kriterií). Při $\lambda = 1$ odmocninové ani podílové kriterium na otázku o konvergenci řady žádnou odpověď nedávají, v takových případech musíme hledat jiný způsob, jak o konvergenci či divergenci rozhodnout.

VĚTA 8.28 (integrální kriterium (Cauchy–McLaurin)). Je-li v $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obecný člen ve tvaru $a_n = f(n)$, kde f je spojitá, kladná a klesající funkce na $[1, \infty)$, pak pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nutné a postačující, aby konvergoval nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Idea důkazu. Buďte $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(n)$, $n \geq 1$, částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Uvažujme křivočarý lichoběžník, omezený křivkou $y = f(x)$ při $x \geq 1$ a vodorovnou osou. Vypočteme-li obsah jeho plochy při $1 \leq x \leq n+1$, dostaneme hodnotu $\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$, přičemž

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n, \tag{8.18}$$

jelikož vpravo je součet obsahů obdélníků o šířce 1 a výškách $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, jejichž levé dolní vrcholy jsou na vodorovné ose v bodech $1, 2, \ldots, n$.

Vezmeme-li obdélníky o šířce 1 a výškách $f(2), f(3), \ldots, f(n+1)$, jejichž levé dolní vrcholy jsou na vodorovné ose v bodech $1, 2, \ldots, n$, a sečteme-li jejich obsahy, dostaneme $\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = s_{n+1} - f(1)$, přičemž z geometrického významu těchto hodnot je patrné, že

$$s_{n+1} - f(1) < \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.19}$$

Konverguje-li $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, z (8.19) plyne, že rostoucí posloupnost $\{s_n : n \geq 1\}$ je shora omezená a tudíž existuje $\lim_{n\to+\infty} s_n < +\infty$. Naopak, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, pak vzhledem k (8.18) musí rovněž konvergovat integrál $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Důsledek 8.29. Zobecněná harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \tag{8.20}$$

konverguje právě při $\alpha > 1$.

Důkaz. Stačí použít větu 8.28 s $f(x) = x^{-\alpha}$. Integrál $\int_1^{\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě v případe, když $\alpha > 1$. □

Zobecněné harmonické řady z důsledku 8.29 lze často využít jako vzoru při srovnání s jinými řadami.

Příklad 8.30. Platí:

(1) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-n-3}$ konverguje;
(2) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ diverguje.

Vysvětlení. Stačí tyto řady srovnat s zobecněnou harmonickou řadou (8.20). Jelikož $2n^3 - n - 3 \sim 2n^3$ při $n \to +\infty$, chová se $a_n = \frac{n}{2n^3-n-3}$ v $+\infty$ stejně jako $\frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2} = b_n$, přičemž dle důsledku 8.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Pak $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ a lze použít větu 8.18.[3]

Pro $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ je $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, $n \to +\infty$. Stačí tedy použít srovnávací větu 8.18 a divergenci harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. □

Poznamenejme, že odmocninové a podílové kriteria ve své podstatě srovnávají danou řadu s nejjednodušší řadou geometrickou, jež konverguje (nebo diverguje) rychle. Existuje rovněž řada dalších podmínek konvergence jemnějšího charakteru, jejich důkaz a využití jsou ovšem složitější.

[3]Poznamenejme, že využití srovnávací věty 8.16 by zde bylo méně pohodlné a více závislé na charakteru výrazu v součtu; např. při $n > 3$ lze napsat odhady

$$\frac{n}{2n^3 - n - 3} \leq \frac{n}{2n^3 - n - n} = \frac{n}{2n^3 - 2n} = \frac{1}{2(n^2-2)} \leq \frac{1}{2(n^2-n)} = \frac{1}{2n(n-1)}$$

§ 8.4. Řady členů proměnného znaménka

Vyšetřování konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde znaménko hodnoty a_n není stálé, je mnohem složitější. My se omezíme jen jednoduššími tvrzeními.

§ 8.4.1. Některé obecné věty

VĚTA 8.31. Pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nutné a zároveň postačující, aby k libovolně malému $\varepsilon > 0$ existovalo N_ε takové, že pro libovolné $m \geq 1$

$$|a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon, \tag{8.21}$$

jakmile je $n \geq N_\varepsilon$.

Důkaz. Podle známé věty je existence limity posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, \ldots$, ekvivalentní s Bolzano–Cauchyovou podmínkou:[a] ke každému malému $\varepsilon > 0$ se najde N_ε takové, že pro všechna $n \geq N_\varepsilon$, $m \geq N_\varepsilon$ je $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Vezmeme-li $m \geq N_\varepsilon$ ve tvaru $m = n + m'$, kde $m' \geq 1$, dostaneme nerovnost (8.21). □

VĚTA 8.32. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Jestlize konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak je pro ní splněná podmínka věty 8.32, přičemž místo nerovnice (8.21) je

$$|a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Avšak $|a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}|$ a tudíž je podmínka věty 8.32 splněna i pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

V souvislosti s větou 8.32 přirozeně vzniká pojem absolutní konvergence řady.

DEFINICE 8.33. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Jelikož je v $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ vždy $|a_n| \geq 0$, lze absolutní konvergenci vyšetřovat s pomocí vět o konvergenci řad s kladnými členy.

DEFINICE 8.34. Přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumějme řadu tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$, kde ϕ je nějaká permutace na $\mathbb{N}$ (t. j. bijekce $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

VĚTA 8.35 (o přerovnání absolutně konvergentní řady). Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně, pak při libovolné permutaci $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ rovněž absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}.$$

§ 8.4.2. Řady alternující

Důležitým speciálním případem obecné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada alternující

$$c_0 - c_1 + c_2 - \ldots,$$

[a] Číselná posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ splňuje Bolzano–Cauchyovu podmínku, jestliže ke každému libovolně malému kladnému ε lze najít N_ε takové, že pro všechna $n, m \geq N_\varepsilon$ platí $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

kde $c_0, c_1, c_2, \ldots$ jsou kladná čísla.

VĚTA 8.36 (Leibnizovo kriterium). Alternující řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$, kde $c_0, c_1, c_2, \ldots$ je klesající posloupnost kladných čišel s $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, konverguje.

PŘÍKLAD 8.37. Řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ konvergují, přičemž druhá z nich konverguje absolutně.

Vysvětlení. Jelikož je $\left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$ klesající posloupností s limitou rovnou 0, lze využít věty 8.36. Táto řada konverguje neabsolutně, neboť harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje.

V případě $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ řada z absolutních hodnot členů má tvar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ a tudíž konverguje podle důsledku 8.29. $\square$