

PŘEDNÁŠKA 9

Funkční řady

Dále uvažujeme funkce jedné reálné proměnné a omezíme se jen základními pojmy. Podrobněji rozebereme důležitý speciální případ řady mocninné.

§ 9.1. Obecné pojmy

Funkční řadou se rozumí nekonečný součet

$$f_1 + f_2 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n, \quad (9.1)$$

kde f_1, f_2, \dots jsou funkce jedné reálné proměnné. Vypočteme-li hodnoty těchto funkcí v bodě x , dostaneme číselnou řadu

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad (9.2)$$

jež pro toto dané x může konvergovat či nikoliv.

DEFINICE 9.1. Oborem konvergence funkční řady (9.1) se rozumí množina všech bodů $x \in \mathbb{R}$, v nichž konverguje číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Vztah (9.2) tedy určuje funkci $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Otázkou však je, přesně na jaké množině M je tato funkce definována a jaké jsou její vlastnosti, zejména zda je f na M spojitá či diferencovatelná, jsou-li takovými všechny f_1, f_2, \dots . Pouhá konvergence řady (9.2) v jednotlivých bodech $x \in M$ tyto vlastnosti, obecně řečeno, nezaručuje (viz příklad 9.6); tato implikace vyžaduje jiného — silnějšího — druhu konvergence.

Pro řady funkční rozlišujeme mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí.

DEFINICE 9.2 (bodová konvergence řady). Bodovou konvergencí funkční řady $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ se rozumí konvergence jednotlivých číselných řad $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pro konkrétní body x , t. j. konvergence posloupnosti $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $n \geq 1$, při pevně zvolené hodnotě x .

Pojem konvergence stejnoměrné, jenž je specifický právě pro řady funkční, znamená stejnoměrnou konvergenci posloupnosti částečných součtů.

§ 9.1.1. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

DEFINICE 9.3 (stejnoměrná konvergence posloupnosti). Budiž u_1, u_2, \dots posloupnost funkcí, definovaných na nějakém intervalu I , a M buď nějaká podmnožina I . Řekněme, že tato posloupnost konverguje k nějaké funkci u stejnoměrně na M , jestliže k libovolně malému ε lze vždy najít N_ε tak, a by pro libovolná $n \geq N_\varepsilon$ a $x \in M$ platilo

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon. \quad (9.3)$$

V takovém případě píšeme $u_n \rightrightarrows u$ pro $n \rightarrow +\infty$ a říkáme, že limita $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ existuje stejnoměrně na množině M .

S využitím pojmu nejmenší horní meze lze vlastnost $u_n \rightrightarrows u$ formulovat takto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in M} |u_n(x) - u(x)| = 0.$$

Poznámka 9.4 (o rozdílu mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí). Ze stejnoměrné konvergence $u_n \rightrightarrows u$, samozřejmě, plyne bodová konvergence $u_n \rightarrow u$, ovšem opačné tvrzení neplatí. Rozdíl mezi dvěma pojmy ihned poznáme, zapíšeme-li definici konvergence bodové: to, že $u_n(x) \rightarrow u(x)$ pro $x \in M$ bodově, znamená, že pro libovolné $x \in M$ k libovolně malému $\varepsilon > 0$ existuje dostatečně velké N_ε takové, že pro $n \geq N_\varepsilon$ platí (9.3). Tedy různým bodům x mohou odpovídat různé hodnoty N_ε a není zaručeno, že lze N_ε zvolit jednotným způsobem na celé množině M .

Vzhledem k poznámce 9.4 může být $u_n \rightrightarrows u$ pouze když $u_n \rightarrow u$ bodově a tudíž při ověřování stejnoměrnosti limity vždy začneme zjištěním limity bodové.

PŘÍKLAD 9.5. Posloupnost funkcí $u_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$, konverguje k $u(x) = 1$ stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$.

Vysvětlení. Pro libovolné x platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) = \cos(0) = 1$, t. j. na $M = [-\pi, \pi]$ posloupnost bodově konverguje ke konstantní funkci $u(x) = 1$. Zkusme ověřit, zda tato konvergence je stejnoměrná ve smyslu definice 9.3. S pomocí vzorce $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ dostaneme

$$\left| \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right| = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2n}\right). \quad (9.4)$$

Zvolme libovolně malé $\varepsilon > 0$. Aby platilo

$$\left| \cos\left(\frac{x}{2n}\right) - 1 \right| < \varepsilon, \quad (9.5)$$

vzhledem k (9.4) stačí, aby bylo $\sin^2\left(\frac{x}{2n}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy $|\sin\left(\frac{x}{2n}\right)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, což bude zaručeno při $\frac{|x|}{2n} < \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, t. j.

$$n > \frac{|x|}{2 \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}. \quad (9.6)$$

Potřebujeme zvolit N_ε tak, aby pro $n \geq N_\varepsilon$ vždy platilo (9.5), a to navíc nezávisle na hodnotě x . Největší hodnotou $|x|$ pro $-\pi \leq x \leq \pi$ je π a tudíž nerovnice (9.6) jistě bude platit pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$ a libovolné $n \geq N_\varepsilon$, položíme-li

$$N_\varepsilon = \frac{\pi}{2 \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} + 1. \quad (9.7)$$

Jelikož hodnota (9.7) nezávisí na x , tímto byla dokázána stejnoměrná konvergence $u_n \rightrightarrows 1$. \square

PŘÍKLAD 9.6. Posloupnost funkcí $u_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $n \geq 1$, bodově konverguje k funkci

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases} \quad (9.8)$$

Konvergence není na $[0, 1]$ stejnoměrná.

Vysvětlení. Je zřejmé, že při $0 < x < 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ a $u_n(1) = 1$ pro všechna n , tedy $u_n \rightarrow u$ bodově. (9.3)

$$|u_n(x) - u(x)| = \begin{cases} x^n & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ |x^n - 1| & \text{pro } x = 1. \end{cases} \quad (9.9)$$

Z grafu (a rovněž i vzorce (9.9)) je zřejmé, že nejmenší horní mez těchto veličin je 1: $\sup_{0 \leq x \leq 1} |u_n(x) - u(x)| = 1$ a tudíž není konvergence stejnoměrná.

Poznamenejme, že, i když všechny funkce u_n jsou na $[0, 1]$ spojité, součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je nespojitá funkce (9.8). \square

§ 9.1.2. Stejnoměrná konvergence funkční řady

DEFINICE 9.7 (stejnoměrná konvergence řady). Funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M , jestliže na M stejnoměrně konverguje posloupnost jejich částečných součtů.

DEFINICE 9.8 (majoranty funkční řady). Platí-li pro všechna $x \in M$ a $n \geq 1$

$$|f_n(x)| \leq a_n,$$

říkáme, že řada s kladnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je majorantou pro funkční řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

VĚTA 9.9 (Weierstrassovo kritérium). Funkční řada, pro níž na dané množině existuje konvergentní majoranta, konverguje na této množině stejnoměrně.

PŘÍKLAD 9.10. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(nx)}{n^2}$ konverguje stejnoměrně pro $-\infty < x < \infty$.

Vysvětlení. Při $-\infty < x < \infty$, $n \geq 1$ platí $\left| \frac{\arctg(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{\pi}{2n^2}$, přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Řada pak konverguje stejnoměrně podle věty 9.9. \square

V případě stejnoměrné konvergence lze dokázat, že součet řady spojitých (resp. diferencovatelných) funkcí bude rovněž funkcí spojitou (diferencovatelnou). Budiž $[a, b]$ nějaký interval.

VĚTA 9.11 (o spojitosti součtu). Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkční řada, kde všechny f_1, f_2, \dots jsou na $[a, b]$ spojitě. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[a, b]$ stejnoměrně, pak její součet je rovněž spojitou funkcí na $[a, b]$.

Bez předpokladu stejnoměrné konvergence zaručit spojitost součtu nekonečně mnoha funkcí obecně nelze (viz příklad 9.6).

VĚTA 9.12 (o diferencovatelnosti součtu). Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkční řada, kde všechny f_1, f_2, \dots mají na $[a, b]$ spojitou derivaci, přičemž v každém bodě $x \in [a, b]$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje na $[a, b]$ stejnoměrně. Pak je součet $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkcí diferencovatelnou na $[a, b]$ a v každém bodě $x \in [a, b]$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Poznámka 9.13. Toto tvrzení lze dokázat v obecnějším tvaru: ve větě 9.12 stačí předpokládat, že všechny f_1, f_2, \dots mají na $[a, b]$ konečnou derivaci a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě $x \in [a, b]$.

§ 9.2. Mocninné řady

DEFINICE 9.14. Mocninnou řadou se nazývá funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

kde c_1, c_2, \dots je nekonečná posloupnost čísel. Bod x_0 se nazývá středem řady.

Po substituci $x - x_0 = t$ bez újmy na obecnosti lze uvažovat pouze případ $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

§ 9.2.1. Konvergence mocninné řady

VĚTA 9.15 (Abel). Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ při $x = a$ ($a \neq 0$), pak rovněž konverguje pro všechna x s $|x| < a$.

DŮSLEDEK 9.16. Diverguje-li $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ při $x = a$, pak diverguje i pro všechna x s $|x| > a$.

VĚTA 9.17 (o poloměru konvergence). Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se středem v 0 vždy existuje R ($0 \leq R \leq +\infty$) takové, že:

- (1) pro všechna $x \in (-R, R)$ řada konverguje absolutně;
- (2) při $|x| > R$ řada diverguje.

Je-li $R = +\infty$, oborem konvergence je $(-\infty, \infty)$; pro $R = 0$ konverguje řada jen ve svém středu (oborem konvergence je tedy množina jednoprvková).

Číslo R ve větě se nazývá poloměrem konvergence mocninné řady.

Poznámka 9.18. Při $|x| = R$ může řada konvergovat neabsolutně, popř. divergovat.

VĚTA 9.19 (o stejnoměrné konvergenci mocninné řady). Buď R poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Pak:

- (1) v každém uzavřeném intervalu $[-r, r]$, kde $0 < r < R$, konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ stejnoměrně;
- (2) diverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ při $x = R$, pak její konvergence na $[0, R)$ není stejnoměrná (podobně v bodě $-R$).

Z věty 9.19 (1) vzhledem k Weierstrassově větě 9.9 plyne, že součet mocninné řady uvnitř intervalu konvergence vždy představuje spojitou funkci. Spojitost v bodech $R, -R$ pak záleží na tom, zda v tomto bodě řada konverguje.¹

PŘÍKLAD 9.20. Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$.

Řešení. Použijme podílové kritérium pro řadu z absolutních hodnot $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} |x|^n$:

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} |x|^{n+1} \frac{n2^n}{|x|^n} = \frac{n}{n+1} \frac{|x|}{2} \rightarrow \frac{|x|}{2}$$

při $n \rightarrow +\infty$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} |x|^n$ tedy konverguje při $|x| < 2$ a diverguje při $|x| > 2$. V intervalu $(-2, 2)$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ konverguje absolutně.

Při $x = 2$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ řadou harmonickou: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ a tudíž diverguje. Při $x = -2$ je to řada alternující $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (-1)^n 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, jež konverguje podle Leibnizova kritéria. \square

S pomocí podobných úvah lze dokázat následující užitečné vzorce pro určení poloměru konvergence.

¹V bodech $R, -R$ mluvíme o spojitosti zleva resp. zprava.

VĚTA 9.21. Bud' R poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Existuje-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda,$$

pak $\frac{1}{R} = \lambda$.

VĚTA 9.22. Bud' R poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Existuje-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda,$$

pak $\frac{1}{R} = \lambda$.

§ 9.2.2. Taylorova řada

Připomeňme si větu o Taylorově vzorci.

VĚTA 9.23 (Taylorův vzorec). Bud' f funkce, jež má v bodě x_0 spojité derivace do řádu n včetně. Pak pro x v okolí bodu x_0 je

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

kde pro zbytkový člen $r_n(x)$ platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (9.10)$$

VĚTA 9.24 (Lagrangeův tvar zbytku Taylorova vzorce). Pro libovolné x v okolí x_0 platí

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (9.11)$$

kde ξ je jistý bod, nacházející se mezi x_0 a x .

Mocninná řada

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

je Taylorovou řadou pro funkci f . Speciálními případy jsou rozvoje

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \end{aligned}$$

(poslední pro $x \in (-1, 1]$).

§ 9.2.3. Operace s mocninnými řadami

VĚTA 9.25. Mocninnou řadu uvnitř jejího intervalu konvergence lze člen po členu derivovat: je-li, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)$ při $|x| < R$, platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$